TAREA #2

1. Un examen para detectar la presencia de una enfermedad tiene precisión $\alpha \in [0, 1]$, en el sentido que la probabilidad de que el resultado sea positivo, cuando la persona está enferma, es α y la probabilidad de que el resultado sea negativo, cuando la persona está sana también es α . Se sabe que la probabilidad de que una persona tenga la enfermedad es p .

Suponga que los exámenes son realizados por dos laboratorios, que funcionan independientemente, en el sentido que, dado el estado de salud de la persona (sana o enferma), los resultados de los exámenes de los laboratorios son independientes. Es decir, si se definen los sucesos $E = \text{“enfermo”}$, $S = \text{“sano”}$, $T_i^+ = \text{“resultado positivo en laboratorio } i\text{”}$, $T_i^- = \text{“resultado negativo en laboratorio } i\text{”}$, para $i = 1, 2$, la independencia de los laboratorios se entiende condicionalmente el sentido que

$$\mathbb{P}(T_1^\pm \cap T_2^\pm | E) = \mathbb{P}(T_1^\pm | E)\mathbb{P}(T_2^\pm | E), \quad \mathbb{P}(T_1^\pm \cap T_2^\pm | S) = \mathbb{P}(T_1^\pm | S)\mathbb{P}(T_2^\pm | S).$$

- a) Averigüe si los sucesos T_1^+, T_2^+ son o no independientes.
 - b) Calcule la probabilidad de que una persona que ha sido diagnosticada como enferma, por al menos uno de los laboratorios, esté realmente enferma. Calcule numéricamente el caso $p = 0,001, \alpha = 0,99$.
 - c) Calcule la probabilidad de que una persona que ha sido diagnosticada como enferma por ambos laboratorios, esté realmente enferma. Calcule numéricamente el caso $p = 0,001, \alpha = 0,99$.
2. Considere un juego en el que se realizan lanzamientos independientes de una moneda, con probabilidad p . Usted comienza con un capital inicial K y cada vez que sale cara, su capital se multiplica por un factor $a > 1$ pero, cuando sale sello su capital se divide por un factor $b > 1$. Sea X la v.a. definida como su capital luego de n lanzamientos de la moneda.
 - a) Muestre que X es una v.a. discreta, especifique el conjunto D_X y calcule la función de probabilidad $p_X(x)$ para todo $x \in D_X$.
 - b) Evalúe $E(X)$.
 3. Una caja contiene 7 monedas, 2 de las cuales son de oro y las restantes son de plata. Las monedas de oro tienen una probabilidad de cara igual a $4/5$ y las de plata, $2/3$. Se escoge una moneda al azar y se lanza 10 veces, independientemente, en el sentido que los sucesos $A_i = \text{“cara en el lanzamiento } i\text{”}$, $i = 1, \dots, 10$, son independientes, condicionalmente en el tipo de moneda usada. Es decir, si $G = \text{“la moneda es de oro”}$ y $S = \text{“la moneda es de plata”}$, entonces $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} | G) = \mathbb{P}(A_{i_1} | G) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k} | G)$, $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} | S) = \mathbb{P}(A_{i_1} | S) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k} | S)$, $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.
 - a) Averigüe si los sucesos A_i son (incondicionalmente) independientes. Es decir si se verifica $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$, $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.
 - b) Calcule la probabilidad de obtener al menos 8 caras.
 - c) Si en el apartado (a) se obtuvieron exactamente 8 caras, calcule la probabilidad de que se haya escogido una moneda de oro.
 - d) Suponga ahora que las 7 monedas son lanzadas independiente y sucesivamente. Calcule la probabilidad de obtener exactamente 1 cara en los 7 lanzamientos.

4. Buses salen de una estación intermodal a intervalos de 10 minutos, a partir de las 12:00. Una persona llega al paradero X minutos después de las 12:00, se sube al bus (con suficiente capacidad) próximo a partir y espera hasta que salga, donde X es una variable aleatoria (continua) uniforme en el intervalo $[0, 60]$. Si T representa el tiempo de espera hasta que sale el bus de la persona,
- a) Determine la función de distribución F_T y la densidad f_T de la variable T .
 - b) Calcule $\mathbb{E}(T)$ y $Var(T)$.
 - c) Indique qué efecto tiene en la ley de T si X es uniforme en $[0, 30]$.