MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 28 de abril de 2022

Auxiliar 7: Variables Aleatorias Discretas

P1. Sea $\Omega = \{\omega = (x, y) | x, y \in \{1, 2, ..., 6\}\}$, dotado del modelo equiprobable, es decir, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$. Este espacio (Ω, P) puede representar el lanzamiento de dos dados hexagonales equilibrados. Se define la variable aleatoria $X(\omega) = xy$, $\forall \omega = (x, y) \in \Omega$.

Determinar la función de probabilidad $p_X(x)$ de y la de distribución $F_x(x)$.

P2. Sea $X : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. con X $Geom(p)$.

a) Pruebe que $X \sim Geom(p)$ (i.e. $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$) ssi $\mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Para las siguientes partes, sean $0 < p, q < 1$ y $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a.'s independientes con $X \sim Geom(p)$,$Y \sim Geom(q)$.

b) Encuentre $\mathbb{P}(Y = X + 1)$

c) Sea $Z = \min X, Y$. Demuestre que Z $Geom(s)$ para algún s, ¿cual es el s?

P3. [**Paseo Aleatorio**] Suponga que un borrachito da un paso a la derecha con probabilidad $p \in (0, 1)$ y un paso a la izquierda con probabilidad $1 - p$. Para modelar la trayectoria que sigue el borrachito supondremos que se posiciona sobre un número entero, comenzando en el origen. Encuentre la probabilidad de que caiga en la posición $k \in \mathbb{Z}$ luego de $n \in \mathbb{N}$ saltos. Deduzca la función de probabilidad de la posición del borrachito.

P4. Un cultivo de bacterias de un cierto tipo puede proliferar o bien extinguirse, lo que ocurre con probabilidad p y probabilidad $1 - p$, respectivamente. Para realizar un estudio, usted genera n de estos cultivos de manera independiente.

a) Indique la función p_X de la variable X correspondiente al número de cultivos que proliferan.

b) Debido a un corte de luz, el sistema de refrigeración de los cultivos deja de funcionar por unas horas, lo cual significa que cada cultivo que prolifero inicialmente se mantendrá vivo o se extinguirá con probabilidad q y $1 - q$ respectivamente, independiente del resto. ¿Cual es la distribución de la variable aleatoria Y correspondiente a los cultivos que quedan vivos?

Resumen

Definición 1 (Bernoulli)**.** Experimento tiene sólo dos posibles resultados: Éxito con prob. $p \in [0,1]$ y falla con prob. $1-p$.

Definición 2 (Binomial)**.** Una v.a. binomial cuenta la cantidad de éxitos en n experimentos independientes, cada uno con prob. de éxito $p \in [0,1]$ y $1-p$ de fallar.

- $R_X = \{0, 1, ..., n\}$
- $\mathbb{E}[X] = np$
- $Var[X] = np(1-p)$

Definición 3 (Geométrica)**.** Se realizan experimentos independientes consecutivos, cada uno con prob. de éxito p y de falla $1-p$. Una $v.a.$ geométrica representa el número del experimento donde se obtuvo el primer éxito.

- $R_X = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1-p}{p}$
- $Var[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$

Probabilidades de variables aleatorias discretas.
Bernoulli $Bern(p)$
$P(X=1) = p$ y $P(X=0) = 1-p$
Binomial $Bin(n,p)$, para $k \in \{0, ..., n\}$
$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Geométrica $Geo(p)$, para $k \in \{1, 2, ...\}$
$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$
Poisson $Pois(\lambda)$, para $k \in \{0, 1, ...\}$
$P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Propuestos

1. Sea $Y \sim geom(p)$, es decir, $P(Y=i) = (1-p)^{i-1}p$. Sea $a \in R$ y la “matriz aleatoria”:

$$A = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{n}(Y-i) + a & aY \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

Calcule la probabilidad de que A sea invertible. (**Hint**: Recuerde que una matriz es invertible si y solo si su determinante es no nulo).