MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 7 de abril de 2022

Auxiliar 4:Probabilidad Condicional

P1. Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo.
Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre, es de un 99 %, y que la probabilidad que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90 %. Suponga que antes de la ecografía las probabilidades de hombre y mujer son iguales a 50 %.

a) Si la ecografía predice que ser a mujer ¿Cuál es la probabilidad que efectivamente lo sea?

b) Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.

P2. La cuarta parte de una población se vacuna para prevenir una enfermedad contagiosa. Durante la epidemia observamos que hay, entre los enfermos, un vacunado por cada cuatro no vacunados. Además, observamos que, entre los vacunados, uno de cada doce está enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de contagiarse para un individuo no vacunado?

P3. La probabilidad de que un fósforo en buen estado efectivamente encienda cuando se intenta prender es $0 < p < 1$, independiente de los otros intentos, mientras que un fósforo en mal estado nunca enciende. De una caja con n fósforos buenos y m malos usted extrae uno al azar.

a) Si en el primer intento el fósforo no prende, determine la probabilidad de que éste malo.

b) Suponiendo que no enciende en el primer intento, determine la probabilidad que encienda en el siguiente intento.

P4. Un laboratorio que esta desarrollando la vacuna para el COVID-19 tiene dos máquinas A y B. El 54 % de las vacunas producidas son hechas por la máquina A y el resto por la máquina B. No todas las vacunas producidas son efectivas.
La proporción de vacunas efectivas hechas por A es 0,8 y por B es 0,5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al aplicar una vacuna esta sea efectiva?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que una vacuna no hizo efecto, proceda de la máquina A?

Resumen

Definición 1 (Prob. Condicionada)**.** Dados dos eventos A, B, se define la probabilidad condicionada de A dado B (cuando $\mathbb{P}(B) \neq 0$), como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Dados dos eventos A y B, se cumple

1. Si $E_1, E_2, E_3, ...$ son eventos mutuamente excluyentes

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i | F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(E_i | F\right)$$

2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ (regla de la multiplicación)

Teorema 1 (Bayes)**.** *Dados dos eventos A, B, se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(A|B\right) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Teorema 2 (Probabilidades Totales)**.** *Dada una colección de eventos $\{A_1, ..., A_n\}$ mutuamente excluyentes que particionan el espacio muestral, se cumple que, dado cualquier evento B,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Propuestos

Prop 1 Un fugitivo se encuentra en una de n zonas (no conectadas entre si). La probabilidad de que se encuentre en la i-ésima zona es p_i y si esta ahí, se le encuentra con probabilidad α_i.

a.1) Si se hace una búsqueda en todas la zonas, determine la probabilidad de encontrarlo.

a.2) Si se le busca en todas las zonas y no se encuentra, determine la probabilidad de que éste en la zona 1.

b) **(Bonus)** Se buscó en la zona j y no se le encontró. Calcule la probabilidad que éste en la zona i, para todo $i = 1, ..., n$.

Prop 2 ¿Cuantas soluciones naturales tiene la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$

P1. Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo.
Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre, es de un 99 %, y que la probabilidad que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90 %. Suponga que antes de la ecografía las probabilidades de hombre y mujer son iguales a 50 %.

a) Si la ecografía predice que ser a mujer ¿Cuál es la probabilidad que efectivamente lo sea?

b) Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.

$$P(PH|H) = \frac{99}{100} \Rightarrow P(PM|H) = \frac{1}{100}$$

$$P(PM|M) = \frac{90}{100} \Rightarrow P(PH|M) = \frac{10}{100}$$

$$P(H) = P(M) = \frac{1}{2}$$

a) $$P(M|PM) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(PM|M)\cdot P(M)}{P(PM)} = \frac{\frac{90}{100}\cdot\frac{1}{2}}{P(PM)}$$

$$P(PM) \overset{\text{Totales}}{=} P(PM|H)\cdot P(H) + P(PM|M)\cdot P(M)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{90}{100}\right) = \frac{91}{100}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(M|PM) = \frac{90}{91}}$$

b) $P(E_{\text{quivocarse}})$ idea Totales para agregar info

Total

$$= P(E_{\text{equivocarse}} \mid H) \cdot P(H) + P(E_{\text{equivocarse}} \mid M) \cdot P(M)$$

$$= P(PM \mid H) \cdot \frac{1}{2} + P(PH \mid M) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{10}{100}\right) = \frac{11}{200} = \boxed{0.055}$$

P2. La cuarta parte de una población se vacuna para prevenir una enfermedad contagiosa. Durante la epidemia observamos que hay, entre los enfermos, un vacunado por cada cuatro no vacunados. Además, observamos que, entre los vacunados, uno de cada doce está enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de contagiarse para un individuo no vacunado?

$$P(V) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(V^c) = \frac{3}{4}$$

$$P(V \mid E) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(V^c \mid E) = \frac{4}{5}$$

Pues $P(V \mid E) + P(V^c \mid E) = 1$

y $4P(V \mid E) = P(V^c \mid E)$

$$P(E \mid V) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(E^c \mid V) = \frac{11}{12}$$

$$P(E \mid V^c) = x$$

$$P(E \mid V^c) = \frac{P(V^c \mid E) \cdot P(E)}{P(V^c)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot P(E)}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{15} P(E)$$

$$P(E) \overset{\text{T. prob}}{=} P(E|V)\cdot P(V) + P(E|V^c)\,P(V^c)$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4} + x\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{60} + \frac{3x}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{16}{15}\cdot\frac{1}{48} + \frac{16}{15}\cdot\frac{3}{4}\cdot x$$

$$x = \frac{1}{45} + \frac{4}{5}x$$

$$\frac{x}{5} = \frac{1}{45} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{9}}$$

P3. La probabilidad de que un fósforo en buen estado efectivamente encienda cuando se intenta prender es $0 < p < 1$ independiente de los otros intentos, mientras que un fósforo en mal estado nunca enciende. De una caja con n fósforo buenos y m malos usted extrae uno al azar.

a) Si en el primer intento el fósforo no prende, determine la probabilidad de que éste malo.

b) Suponiendo que no enciende en el primer intento, determine la probabilidad que encienda en el siguiente intento.

$$P(B) = \frac{N}{N+M} \Rightarrow P(M) = \frac{M}{N+M}$$

$$P(E_i|B) = p \qquad P(E_i|M) = 0$$

$$\Rightarrow P(E_i^c|B) = 1-p \qquad P(E_i^c|M) = 1$$

a) $P(M \mid E_1^c) = \dfrac{P(E_1^c \mid M) \cdot P(M)}{P(E_1^c)} = \dfrac{1 \cdot \frac{M}{N+M}}{P(E_1^c \mid M) \cdot P(M) + P(E_1^c \mid B) P(B)}$

$$= \frac{\frac{M}{N+M}}{\frac{M}{N+M} + \frac{(1-p)N}{N+M}} = \frac{M}{M + (1-p)N}$$

b) $P(E_2 \mid E_1^c) = \dfrac{P(E_2 \cap E_1^c)}{P(E_1^c)} = \big(P(E_2 \cap E_1^c \mid M) \cdot P(M) + P(E_2 \cap E_1^c \mid B) \cdot P(B)\big) \cdot \dfrac{1}{P(E_1^c)}$

$$= \frac{0 \cdot P(M) + p(1-p) \cdot \frac{N}{\cancel{N+M}}}{\frac{M + (1-p)N}{\cancel{M+N}}} = \boxed{\frac{p(1-p)N}{M + (1-p)N}}$$

P4

$$P(A) = \frac{54}{100} \quad y \quad P(B) = \frac{46}{100}$$

$$P(E|A) = 0.8 \qquad P(E|B) = 0.5$$

$$P(E) \overset{\text{Totales}}{=} P(E|A)\cdot P(A) + P(E|B)\cdot P(B) = \frac{0.8\cdot 54 + 0.5\cdot 46}{100}$$

$$= \frac{2}{100}\left(4\cdot 5.4 + 5\cdot 2.3\right)$$

$$= \frac{1}{50}\left(21.6 + 11.5\right)$$

$$= \frac{1}{50}\left(33.1\right) = \boxed{\frac{33.1}{50}}$$

Prop 1 Un fugitivo se encuentra en una de n zonas (no conectadas entre si). La probabilidad de que se encuentre en la i-ésima zona es p_i y si esta ahí, se le encuentra con probabilidad α_i. → descubre

a.1) Si se hace una búsqueda en todas la zonas, determine la probabilidad de ~~encontrarlo~~. → Descubrirlo

a.2) Si se le busca en todas las zonas y no se encuentra (Descubre), determine la probabilidad de que éste en la zona 1.

b) **(Bonus)** Se buscó en la zona j y no se le encontró (Descubrió). Calcule la probabilidad que éste en la zona i, para todo $i = 1, ..., n$.

Datos

$$P(E_i) = p_i \Rightarrow P(E_i^c) = 1 - p_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} P(E_i) = 1$$

$$P(D_i | E_i) = \alpha_i \Rightarrow P(D_i^c | E_i) = 1 - \alpha_i$$

Si $i \neq j$ $\quad P(D_j | E_i) = 0$, si está en i no está en j

a.1) $P(D) \overset{\text{TPT}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(D|E_i) \cdot P(E_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} P(D_i|E_i) P(E_i)$, per $(D_j|E_i) = 0$

$$\boxed{P(D) = \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i}$$

a.2) $P(E_1|D^c) \overset{\text{bayes}}{=} \dfrac{P(D^c|E_1) \cdot P(E_1)}{P(D^c)} = \dfrac{P(D^c|E_1) \cdot p_1}{1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i}$

$P(D^c|E_1) = 1 - P(D|E_1) = 1 - P(D_1|E_1) = 1 - \alpha_i$

$$\Rightarrow \boxed{P(E_1|D^c) = \frac{(1-\alpha_1) p_1}{1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i}}$$

b) Caso 1 $\quad i = j$

$$P(E_j | D_j^c) = \frac{P(D_j^c | E_j) \cdot P(E_j)}{P(D_j^c)} = \frac{(1-\alpha_j) p_j}{1 - P(D_i)}$$

$$= \frac{(1-\alpha_j) \cdot p_j}{1 - \sum_{i=1}^{n} P(D_i | E_i) \cdot P(E_i)} = \frac{(1-\alpha_j) p_j}{1 - (1-\alpha_i) p_j}$$

Caso $i \neq j$

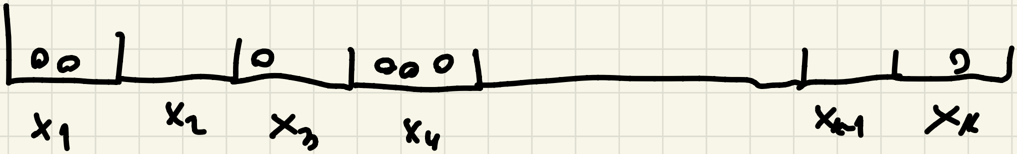
$$P(E_i | D_j^c) = \frac{P(D_j^c | E_i) \cdot P(E_i)}{P(D_j^c)} = \frac{1 \cdot p_i}{1-(1-\alpha_j) p_j}$$

$$\boxed{P(E_i | D_j^c) = \frac{p_i}{1-(1-\alpha_j) p_j}}$$

Propuesta 2 Soluciones naturales $x_1 + \dots + x_k = N$

idea $(N, 0, \dots, 0)$

$(N-1, 1, \dots, 0)$



Son K urnas con N bolitas

$$\Rightarrow \boxed{\binom{N+K-1}{N} \quad \text{Formas de ordenar}}$$