

MA3403-4. Probabilidades y Estadística**Profesor:** Raúl Gouet**Auxiliares:** Vicente Salinas**Fecha:** 31 de marzo de 2022**Auxiliar 3: Más Combinatoria**

- P1.** Un grupo de 4 alumnos p_1, p_2, p_3 y p_4 debe realizar una tarea que consta de 12 problemas (enumerados de 1 a 12). Debido al semestre on line, encuentran que va a ser difícil resolver en conjunto los problemas, por lo que deciden repartirse los problemas para resolver cada uno 3 problemas de forma independiente.
- ¿De cuántas maneras se pueden repartir los problemas?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que al alumno p_1 le toque hacer problemas consecutivos?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que a todos les toque hacer problemas consecutivos?
- P2.** Un grupo de 15 mujeres y 5 hombres se deben separar en dos grupos: 10 personas para el proyecto principal A y 10 para el proyecto secundario B . Además a cada proyecto se debe asignar un jefe o jefa de proyecto entre sus miembros.
- Determine la cantidad de formas que hay de asignar a las personas a los proyectos y sus jefaturas.
 - Si todas las asignaciones son igualmente probables, calcule la probabilidad de que el proyecto principal no incluya hombres.
 - Calcule la probabilidad de que las dos jefaturas sean ocupadas por mujeres.
 - Calcule la probabilidad de que simultáneamente el proyecto principal no incluya hombre y que las dos jefaturas sean ocupadas por mujeres.
 - Usando las partes anteriores deduzca que la probabilidad de que simultáneamente el proyecto principal incluye al menos a un hombre y que al menos una jefatura sea ocupada por un hombre.
- P3.** En la isla de Combinatoria, todos los autos tienen una patente de 5 dígitos (del 1 al 9). Un testigo de un crimen solo pudo dar una descripción parcial de la patente del auto que se fugó del lugar de los hechos. De acuerdo al testigo, la patente tenía un solo dígito que ocurre más de una vez y ese dígito aparecía 3 veces. ¿Cuál es el porcentaje de vehículos sospechosos?
- P4.** Se tienen n urnas diferentes. Calcule de cuántas maneras diferentes se pueden colocar en ellas m bolas idénticas (con $n < m$):
- Sin restricción alguna en cuanto al número de bolas en cada urna.
 - Si no puede haber ninguna urna vacía.
 - Si quedan exactamente r , considere ($0 < r \leq n$) urnas vacías.

Resumen

Definición 1. Una **probabilidad** $\mathbb{P}$ es una función $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Si $(A_n)_n$ son eventos tales que $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Proposición 1. 1. Sea A un evento cualquiera, entonces $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

3. Sean A, B eventos cualesquiera, entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

4. Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Definición 2. Supongamos que $|\Omega| < +\infty$. Diremos que Ω es **equiprobable** cuando

$$(\forall w \in \Omega) \mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Además se cumple que: $(\forall A \subseteq \Omega) \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Proposición 2 (Principio Aditivo de Conteo). Sea

Proposición 6.

[Inclusión-exclusión] Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$. Entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) - \dots - (-1)^n \mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_n).$$

Propuesto

Prop 1 Un grupo de $n < 365$ amigos se reúnen a celebrar cada día que uno (o varios) de ellos está de cumpleaños. Calcule la probabilidad de que se celebren

- (a) Solo una vez.
- (b) Exactamente 2 veces.
- (c) Exactamente n veces.
- (d) Menos de n veces.

Prop 2 Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su misma fila o columna. Dos torres son indistinguibles si no puedo diferenciar a qué lado del tablero atacan, por lo tanto, es posible que se ataquen entre si.

a) Sea $K \in \mathbb{N}$. Ubicar K Torres en $K \times K$ casillas, sin que se ataquen

b) Sea $K, m \in \mathbb{N}$ Ubicar K Torres en $m \times m$

c) Sea $K, m, M \in \mathbb{N}$ Ubicar K Torres en $m \times M$

Sean A, B conjuntos disjuntos tales que $|A| = n$ y $|B| = m$. Entonces $|A \cup B| = n + m$. Sean E_1, E_2 dos experimentos disjuntos con $|E_1| = n$ y $|E_2| = m$. Entonces el numero de formas de realizar alguno de los dos experimentos viene dado por $n+m$.

Proposición 3 (Principio Multiplicativo de Conteo). Sean E_1, E_2 dos experimentos disjuntos con $|E_1| = n$ y $|E_2| = m$. Entonces el numero de formas de realizar el primer experimento y luego el segundo experimento viene dada por $n \cdot m$.

Proposición 4. Sean $a_1, \dots, a_n$ n objetos diferentes. Entonces la cantidad de formas de elegir k objetos de los n anteriores viene dada por:

	Con Orden	Sin Orden
Con Reposición	n^k	$\binom{k+n-1}{n-1}$
Sin Reposición	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Proposición 5. Suponga tenemos n objetos tales que hay n_1 objetos de tipo 1 indistinguibles entre si, n_2 objetos de tipo 2 indistinguibles entre si, ..., n_k objetos de tipo k indistinguibles entre si. Entonces la cantidad de permutaciones de los n objetos viene dada por:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

P1

i) Como cada alumno elige 3 preguntas

Tenemos que $\#P_1 = \binom{12}{3}$ maneras de
escoger la pregunta, pues hay 12
distintas y selecciona 3 sin orden y
sin repetición, con la misma idea

$$\#P_2 = \binom{9}{3}, \#P_3 = \binom{6}{3} \text{ y } \#P_4 = \binom{3}{3}$$

$$\Rightarrow \# = \binom{12}{3} \binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \quad \begin{array}{l} \text{Cans} \\ \text{Totales} \end{array}$$

b) CF

1 2 3
2 3 4
...
10 11 12

} 10 maneras

$$\Rightarrow \#P_1 = 10$$

Para P_2 , P_3 y P_4 no hay restricciones

$$\Rightarrow CF = 10 \cdot \binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3}$$

$$IP = \frac{10}{\binom{12}{3}}$$

$$c) CF = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ & 4 & 5 & 6 \\ & & 7 & 8 & 9 \\ & & & 10 & 11 & 12 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} P_1 \text{ Tiene 1} \\ \text{de entre 11 opciones} \end{array} \right.$$

P_2 una de las 3 restantes.

P_3 una de las 2 restantes y

P_4 una forma única

$$\Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

$$\Rightarrow P = \frac{4!}{\binom{12}{3} \binom{9}{7} \binom{6}{3}}$$

Op 1 El grupo A $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ de escoger

los integrantes, el grupo B $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Para escoger la Jefatura A 10 opciones,

para la de B 10

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot 10^2$$

Op 2 Jefatura A $\Rightarrow$ 20 opciones

Jefatura B $\Rightarrow$ 19 opciones

$\Rightarrow$ Integrantes restantes A $\Rightarrow \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}$ e

integrantes de B $\Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$20 \cdot 19 \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Son iguales

b) $\boxed{CF}$ Si el grupo A no tiene Hombres

$$\Rightarrow \begin{matrix} \# \text{integrantes} & A & = & \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \\ \text{integrantes} & B & = & \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{Jefatura A} = 10$$

$$\text{Jefatura B} = 10$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} 10^2$$

$$\Rightarrow P(b) = \frac{\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

c) Jefatura solo mujeres

$$\Rightarrow \text{Jefatura A} = 15 \text{ opciones}$$

$$\text{Jefatura B} = 14 \text{ opciones}$$

$$\text{Reste di integers } A = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{" " } B = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\emptyset) = \frac{15 \cdot 14}{20 \cdot 19} = \frac{21}{38}$$

$$d) P(\emptyset \cap \emptyset) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Integers side number } A$$

$$10 \text{ options de } \text{Jcfr } A$$

$$\begin{pmatrix} 19 \\ 19 \end{pmatrix} \rightarrow \text{integers } B$$

$$5 \text{ options } \text{Jcfr } B \text{ (5, 5, 5, 5, 5)}$$

$$\Rightarrow P(B \cap C) = \frac{\binom{15}{10} \cdot 40 \cdot 5}{\binom{20}{10} \cdot 10 \cdot 2}$$

$$e) P(B^c \cap C^c) = 1 - P(B \cup C)$$

$$\begin{aligned} P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &= \frac{\binom{15}{10}}{\binom{20}{10}} + \frac{21}{38} - \frac{\binom{15}{10}}{2 \binom{20}{10}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\binom{15}{10}}{2 \binom{20}{10}} + \frac{21}{38}$$

$$\Rightarrow P(B^c \cap C^c) = \frac{17}{38} - \frac{\binom{15}{10}}{2 \binom{20}{10}}$$

P_3 Hay 9^5 Patentes distintas
sin condiciones p... s Trio

~ _ _ _ _

$\binom{5}{3}$ son las posturas del Trio

~ 9 sus opciones

$\Rightarrow \binom{5}{3} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \leftarrow$ opciones
 $\uparrow$ opciones primer dígito distinto
opciones 2do dígito

$$\Leftrightarrow P = \underbrace{\binom{5}{3} \cdot 8 \cdot 7}_{9^4}$$

P4) a) m bolitas
 N urnas

$| 0 \dots 0 | \quad | \quad | \quad | 0 \dots 0 | \quad \dots \quad | \dots | \quad \dots \dots |$
 $| -v_1 - | -v_2 - | -v_3 - | -v_4 - | \dots \dots | v_{N-1} - | \dots v_N - |$

No tenemos que los $| \quad |$ de las
 extremas estar fijos $\Rightarrow$ Hay $N-1$ $|$
 m 0

$\Rightarrow \binom{m+N-1}{m}$ maneras de ordenarlos
 (Posteros de los 0)

b) Usando la misma idea con

$$I = 0$$

$$\Rightarrow | \circ \circ I \circ \circ I I \circ I \dots I \circ \circ I |$$

$$\Rightarrow \# I \quad N-1$$

$$\# 0 \quad m-N$$

$$\Rightarrow \# = \binom{m-1}{N-1}$$

① Primer paso escoger las r urnas

$$\text{Vacías} \Rightarrow \binom{m}{r}$$

y ahora con las $m-r$ urnas

Todas tienen al menos 1, por D

$$\Rightarrow \binom{m-r-1}{N-1}$$

$$\Rightarrow \# = \binom{m}{r} \binom{m-r-1}{N-1}$$

Propuesto 1

a) Significa que las cumpleaños
misma día $\Rightarrow$

$$365 \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^N$$

b) $CF = \binom{365}{2}$

Que 2 días del año

$\left[\sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} \right]$

Es como a i de los N , que

Sean los que
Cumplen años primos.

los restantes $N-2$

Sean los del 2º día

$$CT = 365^N$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \binom{365}{2} \binom{N}{i}}{365^N}$$

$$\underline{Obs} = \sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} = \underline{2^N - 2}$$

Todas las opciones entre
Día 1 y Día 2

salvo para los
2's

$$\Rightarrow P = \frac{\binom{365}{2} [2^n - 2]}{365^n}$$

c) Exactamente n $\Rightarrow$ Todos días distintos

$$P = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} \quad \left. \vphantom{\frac{365!}{(365-n)!}} \right\} \text{ Todos distintos}$$

d) No temas que $P(d) = 1 - P(A)$

Con $A = \text{MÁS o igual a } n$

= Igual a n / pero más o
imposible

$$\Rightarrow P(n) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

Propuesta 2

a) La idea es que quede uno en cada fila $\rightarrow$ 1 en cada columna

$\Rightarrow$ En la primera fila hay K

columnas disponibles $\Rightarrow K$

En la segunda fila ahora solo quedar

$K-1$ columnas disponibles

$\vdots$

En la $K-1$ fila queda Z columnas disponibles

En la K fila solo queda 1 columna

$\Rightarrow K!$ manera

b) Si $K > N \Rightarrow$ Es imposible, por haber Z en la misma fila

Si $K \leq N \Rightarrow$ Solo usaremos K filas

$\Rightarrow \binom{N}{K}$ seleccionamos las K filas en Torres

y luego con la misma idea Hay N columnas en la primera fila, luego $N-1$

- - - - - Hasta $N-(K-1)$ para

la última torre $\Rightarrow \binom{N}{K} \frac{N!}{(N-K)!}$

c) No dando que $K > N$ o $K > M$

$\Rightarrow$ Imposible

Sea $K \leq N$ y $K \leq M$

Usando la misma idea seleccionamos $\binom{N}{K}$ platos

y luego habra $\frac{M!}{(M-K)!}$ para las bebidas

Usadas por las K torres

$$\binom{N}{K} \frac{M!}{(M-K)!} = \frac{N!}{(N-K)! K!} \cdot \frac{M!}{(M-K)!} = \frac{N!}{(N-K)!} \binom{M}{K}$$

Pues se podía hacer al revés