**MA3403-4. Probabilidades y Estadística**
**Profesor:** Raúl Gouet
**Auxiliares:** Vicente Salinas
**Fecha:** 24 de marzo de 2022

# Auxiliar 2: Combinatoria

**P1.** Dado un conjunto de $n$ personas, por ejemplo estudiantes de este curso, nos interesa estimar la probabilidad de que haya al menos dos personas que tienen cumpleaños el mismo día.

**P2.** Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen 2 tipos de turnos, los $n$ turnos de día y $n$ turnos de noche, De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren el turno de día y $0 < b < n$ prefieren el de noche. El resto es indiferente para trabajar de día o de noche. Si los turnos se reparten al azar y solo uno por persona, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda un turno de su preferencia.

**P3.** Un grupo de personas, de tamaño $k \in N$, denotaremos a cada integrante como $\{1, ..., k\}$ va al cine. Si las personas $k$ se sientan juntas en la misma fila, calcule el número de configuraciones posibles en las cuales se pueden sentar si:

*a*) Se pueden sentar como quieran.

*b*) Dos personas en particular se tienen que sentar juntas.

*c*) Dos personas no pueden sentarse juntas.

*d*) [**Propuesto**] Hay un grupo de tamaño $i \leq k$ que se tiene que sentar juntos.

**P4.** Una mano de poker son 5 cartas escogidas al azar entre 52 cartas de un naipe inglés.

(a) Si las cartas tienen números consecutivos y no todas tienen la misma pinta se dice que la mano es una escalera. Por ejemplo $5\spadesuit, 6\clubsuit, 7\heartsuit, 8\diamondsuit, 9\spadesuit$ es una escalera. También lo es $10\diamondsuit, J\heartsuit, Q\diamondsuit, K\spadesuit, A\clubsuit$. Los ases pueden comenzar o terminar una escalera, pero no pueden ir al medio.

Por ejemplo, $Q\diamondsuit, K\heartsuit, A\diamondsuit, 1\spadesuit, 2\clubsuit$ no es una escalera. ¿Cual es la probabilidad de obtener una escalera?

(b) Un full corresponde a una mano donde hay un par y un trío, sin importar la pinta de estos. Por ejemplo, $2\diamondsuit, 2\heartsuit, 5\diamondsuit, 5\spadesuit, 5\clubsuit$ es un full. ¿Cual es la probabilidad de obtener un full?

# Resumen

**Definición 1.** Una **probabilidad** $\mathbb{P}$ es una función $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Si $(A_n)_n$ son eventos tales que $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$, entonces:
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

**Proposición 1.** *1. Sea $A$ un evento cualquiera, entonces $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.*

*2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.*

*3. Sean $A, B$ eventos cualesquiera, entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.*

*4. Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

**Definición 2.** Supongamos que $|\Omega| < +\infty$. Diremos que $\Omega$ es **equiprobable** cuando
$$(\forall w \in \Omega)\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Además se cumple que: $(\forall A \subseteq \Omega)\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

**Proposición 2** (Principio Aditivo de Conteo)**.** *Sean $E_1, E_2$ dos experimentos disjuntos con $|E_1| = n$ y $|E_2| = m$. Entonces el numero de formas de realizar alguno de los dos experimentos viene dado por $n + m$.*

**Proposición 3** (Principio Multiplicativo de Conteo)**.** *Sean $E_1, E_2$ dos experimentos disjuntos con $|E_1| = n$ y $|E_2| = m$. Entonces el numero de formas de realizar el primer experimento y luego el segundo experimento viene dada por $n \cdot m$.*

**Proposición 4.** *Sean $a_1, ..., a_n$ $n$ objetos diferentes. Entonces la cantidad de formas de elegir $k$ objetos de los $n$ anteriores viene dada por:*

| | Con Orden | Sin Orden |
|---|---|---|
| Con Reposición | $n^k$ | $\binom{k+n-1}{n-1}$ |
| Sin Reposición | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}$ |

**Proposición 5.** *Suponga tenemos $n$ objetos tales que hay $n_1$ objetos de tipo 1 indistinguibles entre si, $n_2$ objetos de tipo 2 indistinguibles entre si,..., $n_k$ objetos de tipo $k$ indistinguibles entre si. Entonces la cantidad de permutaciones de los $n$ objetos viene dada por:*
$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

**Proposición 6.**

***[Inclusión-exclusión]*** *Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$. Entonces*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} Ai\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_iA_jA_k) - \cdots - (-1)^n \mathbb{P}(A_1A_2 \ldots A_n).$$

# Propuesto

**Prop 1** De un grupo de 5 mujeres y 7 hombres debe formarse un comité de 2 mujeres y 3 hombres. Determine cuántos posibles comités hay si:

*a)* No hay restricción.

*b)* Dos hombres están peleados y no pueden ser seleccionados ambos.

*c)* Hay un hombre y una mujer que son pareja y solo aceptaran ser parte del comité si se seleccionan a ambos.

**Prop 2** Un examen consta de 14 temas. Se debe escoger un tema de entre 2 tomados al azar. Se pide:

*a)* Calcular la probabilidad de que un alumno que ha preparado 8 temas le toque al menos uno que sabe.

*b)* ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a $\frac{1}{2}$ de superar el examen?

P1 Notar que Al menos dos estén de cumpleaños es:

= {2 estén} ∪ {3 estén} ∪ ... ∪ {n estén}

Por lo tanto en vez de calcular cada una y sumarla es más fácil

$$\underbrace{P(\text{Al menos } 2)}_{A} = 1 - P(\underbrace{\text{Todos cumplen días distintos}}_{A^c})$$

Vamos A calcularla como $\dfrac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$

Casos Favorables

$$365 \cdot 364 \cdot \ldots \ldots \ldots \cdot \underbrace{(365-n+1)}$$

1er persona Tiene 365 días de opción

2do persona Tiene cualquier día menos el de la primera

N persona Tiene 365-(N-1) opciones

Forma compacta: $\dfrac{365!}{(365-m)!}$

Interpretación: Tenemos (365 días opciones) y los repartimos a (N personas) escogidos

| | | | |
|---|---|---|---|
| Importa el orden<br>No se pueden Repetir | $\dfrac{N!}{(N-K)!}$ | con | $N = 365$<br>$K = m$ |

## Casos Totales

Repartir 365 días a N personas, pero ahora con repetición

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⇒ Importa el orden<br>Se puede repetir | $N^K$ | con | $N = 365$<br>$K = m$ |

$\Rightarrow 365^m$ (Cada persona tiene 365 opciones)

$$\Rightarrow P(A^c) = \frac{\frac{365!}{(365-m)!}}{365^m}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| P(N) | 0.0 | 0.0027 | 0.0082 | 0.0163 | 0.0271 | 0.0404 | 0.0562 | 0.0743 | 0.0946 | 0.1169 | 0.1411 | 0.1670 | 0.1944 | 0.2231 | 0.2529 | 0.2836 |
| N | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 80 | |
| P(N) | 0.3150 | 0.3469 | 0.3791 | 0.4114 | 0.4436 | 0.4756 | 0.5072 | 0.5383 | 0.5686 | 0.5982 | 0.6268 | 0.6544 | 0.6809 | 0.7063 | 0.9999 | |

Apartir de $N=23$ es más probable que pase

Ejemplo: en clases con 53 alumnos obtuvimos 2 pares que compartían cumpleaños

$\boxed{P2}$ Hay $2n$ Trabajadores < Hay $n$ Turnos / Hay $n$ Turnos

$0 < a < N$ Prefieren día

$0 < b < N$ Prefieren Noche

Primera cosa importante, si se reparten los $N$ Turnos de día, no hay que repartir los de noche, pues serán el resto.

De cuantas formas se pueden repartir los turnos sin restricción

$\boxed{CT}$ Hay 2N candidatos a escoger y hay que escoger N para los turnos de día.

- No se puede estar en 2 turnos (Sin Repetis)
- No hay orden entre los escogidos, pues no hay un jefe o algo del turno (Sin orden)

$$= \binom{2N \to \text{Opciones}}{N \to \text{Escogidas}}$$

$\boxed{CF}$ Para ser un caso favorable primero hay que asegurarse que los a trabajen de día

$$\binom{a}{a} = 1$$

Ahora solo quedan $2n-a-6$ candidatos a los puestos restantes de día

y quedan $n-a$ cupos de trabajo

$$\Rightarrow \binom{2n-a-6}{n-a}$$

Por P. Multiplicativo

$$= \binom{a}{a}\binom{2n-a-6}{n-a}$$

$$\Rightarrow P(A_2) = \frac{\binom{2n-a-6}{n-a}}{\binom{2n}{n}}$$

P3 | La Fila del cine es de largo $K$

a) El problema es repartir $K$ personas en $K$ asientos, lo que corresponde a $\boxed{K!}$

(Es lo mismo que reordenar $K$ elementos)

b) Buena idea juntar a estas dos personas como una doble persona

A B C D E-F G .... N

Hay $K-1$ personas y $K-1$ asientos

$\Rightarrow (K-1)!$

Pero falta el orden de la doble-persona

y eso es EF o FE 2 formas

$$\Rightarrow \underbrace{(K-1)!}_{\text{Manera de los }(K-1)\text{ Asientos}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{Del Asiento doble}}$$

c) Opción 1 Notar que es la negación de b)

$$\Rightarrow \underbrace{K!}_{\text{Total}} - \underbrace{(K-1)!\,2}_{\text{Caso Contrario}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(K-2)(K-1)!}$$

Opción 2: Hay 2 personas que no se quieren sentar junto digamos M y N

Caso 1: M Se sienta en un Asiento interior

$\Rightarrow$ _ _ _ X M X . . . _ _

que N no se puede sentar en 3 Asientos (El de M y los vecinos)

$$\Rightarrow (K-2) \cdot (K-3) \cdot (K-2)!$$

opciones de M

opciones de N

El resto se sienta en los K-2 Asientos

Caso 2: M Se sienta en una orilla

M X _ . . . _ _ _

En ese caso N Tiene K-2

opciones, pues solo se bloquea 1 extra al de (M)

$$\Rightarrow \underbrace{2}_{\text{opciones (M)}} \cdot \underbrace{K-2}_{\text{opciones (N)}} \cdot \underbrace{(K-2)!}_{\text{El resto}}$$

Como son casos disjuntos se suman y no se resta nada (intersección vacía)

$\Rightarrow$

$$= (K-2)!\,(K-2)\left[2 + K - 3\right]$$

$$= (K-1)! \cdot (K-2)$$

d) Utilizando una idea similar a b)

$\Rightarrow$ Hay $K-i$ personas y $1$ $i$-persona

Por lo que partiremos ordenando $K-i+1$ elementos en $K-i+1$ posiciones

$\Rightarrow (K-i+1)!$

y ahora ordenaremos los $i$ elementos que unimos $\Rightarrow i!$ formas

$$\Rightarrow \boxed{(K-i+1)!\ i!}$$

$\boxed{P4}$ $\boxed{CT}$ De cuantas maneras se puede sacar una mano de 5 cartas

- No hay orden
- No se puede repetir

Hay 52 opciones $\longrightarrow$ $\binom{52}{5}$
Se escogen 5 $\longrightarrow$

$\boxed{CF}$ Para obtener una escala hay que tener primero los números

$$\left.\begin{matrix} A\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ \ddots \\ 10\ J\ Q\ K\ A \end{matrix}\right\}\ 10 \text{ opciones}$$

Falta las combinaciones de Pintas

Hay 4 opciones para cada carta

Pero no todas pueden tener la misma pinta

$$\Rightarrow \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{4^5} - 4$$

$$4^5 - 4$$

Caso todas misma pinta

$$\Rightarrow 10 \cdot (4^5 - 4) = 10 \cdot 4 (4^4 - 1)$$

Opciones Número

Opciones pinta $\Rightarrow$ $\boxed{P = \frac{40 (4^4 - 1)}{\binom{52}{5}}}$

b) Hay que escoger el número del par

y el número del Trio

$$\Rightarrow 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$$

Número del par

Número del Trio

Pintas del Trio

Pintas del par

Para las pintas no hay un orden y no se puede repetir.

$$\boxed{\mathbb{P} = \frac{13 \cdot 12 \binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}}$$

Propuesto 1

a) $\boxed{\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3}}$

Escoger de entre 5 a 2 mujeres

Escoger de entre 7 a 3 Hombres

b) A las mujeres no las afecta

Se puede ver como el complemento de escoger a dos hombre juntos

Como se seleccionan 3 Hombres, si 2 estan listos solo queda 1 cupo y 5 opciones lo que es $\binom{5}{1} = 5$

$\Rightarrow \binom{7}{3} - 5 =$ No escoger juntos a 2 Hombres

$$\Rightarrow \binom{5}{2}\left[\binom{7}{3} - 5\right]$$

Observación: Se puede hacer por casos

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{No escoger a ninguno}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{Escoger a 1}} + \binom{5}{2}$$

Escoger al otro

$$\binom{5}{3}+\binom{5}{2}+\binom{5}{2} = \left[\binom{7}{3}-5\right]$$

$$\frac{20}{2}+\frac{20}{2}+\frac{20}{2} = 35-5$$

$$30 = 30$$

c) Opción 1   Ambos estan $\Rightarrow$ Hay 1 cupo menos de cada uno

$$\Rightarrow \binom{4}{1}\binom{6}{2}$$

Quedan 4 mujeres → 1 cupo

Quedan 6 Hombres → 2 cupos

Opción 2   No estan

$$\Rightarrow \binom{4}{2}\binom{6}{3} \Rightarrow \boxed{R = \binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{2}\binom{6}{3}}$$

Propuesto 2 $\boxed{CT}$ $\binom{14}{2}$

No hay orden
No repite

Vamos a calcularlo como el complemento de no saber ninguna

$\boxed{CF}$ $\underbrace{\binom{14}{2}}_{\text{El Total}} - \underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{No escoger ninguna que sepa}}$

Como son casos disyuntos

$$\Leftrightarrow \frac{\binom{14}{2} - \binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = 1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = P(a)$$

$6 \rightarrow (14-8)$

b) Usando la misma idea

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{\binom{14-x}{2}}{\binom{14}{2}}$$

$$\Rightarrow \binom{14-x}{2} < \frac{1}{2}\binom{14}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(14-x)!}{(12-x)!\,\cancel{2!}} < \frac{1}{2}\,\frac{14!}{12!\cdot\cancel{2!}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{(14-x)!}{(12-x)!}}_{(14-x)(13-x)} < 7\cdot 13$$

$$(14-x)(13-x) < 7\cdot 13$$

$$14 \cdot 13 - 27x + x^2 < 7 \cdot 13$$

$$7 \cdot 13 - 27x + x^2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad x \in [3{,}98,\ 14]$$

$$\Rightarrow \quad x \geq 4$$

BASTA CON PREPARAR 4 TEMAS