MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 17 de marzo de 2022

Auxiliar 1: Axiomas y Conjuntos

P1. Considere el siguiente experimento: Reordenar, de manera aleatoria, los dígitos 1, 2 y 3.

a) Describa el espacio muestral asociado al experimento.

b) Para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distintos calcule la probabilidad del evento $A_i = \{\text{El i-ésimo dígito es i}\} \subseteq \Omega$, luego calcule $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ y finalmente la probabilidad de que al menos un dígito caiga en su posición correcta.

P2. Una caja contiene 3 pelotitas, 1 roja, 1 verde y 1 azul. Considere el experimento que consiste en sacar una pelotita, devolverla y luego sacar otra.

a) Describa el espacio muestral de este experimento.

b) ¿Como seria el espacio muestral si no se repone la pelotita luego de sacarla?

P3. La probabilidad de que una persona haya visto durante su infancia: Hannah Montana es 0,65 y de haber visto Dragon Ball Z 0,75. También se sabe que la probabilidad de que una persona haya visto ambas es 0,5,

a) Determine la probabilidad de que haya visto alguno de los dos programas.

b) Determine la probabilidad de solo haya visto Dragon Ball Z.

P4. Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad:

a) Sean A y B sucesos en este espacio tales que $\mathbb{P}(A \cup B) = P(A \cap B)$. Pruebe que: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

b) Decimos que la colección de eventos $(A_i)_{i=1}^N \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una partición de Ω si: $\bigcup_{i=1}^N A_i = \Omega$ y $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Para una partición, pruebe que debe existir un $i \in \{1, ..., N\}$ tal que $P(A_i) \leq \dfrac{1}{N}$

c) Pruebe que debe existir un $i \in \{1, ..., N\}$ tal que $P(A_i) \geq \dfrac{1}{N}$

Resumen

Definición 1. Una **probabilidad** $\mathbb{P}$ es una función $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Si $(A_n)_n$ son eventos tales que $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$, entonces:
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Proposición 1. *1. Sea A un evento cualquiera, entonces $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.*

2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

3. Sean A, B eventos cualesquiera, entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

4. Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Definición 2. Supongamos que $|\Omega| < +\infty$. Diremos que Ω es **equiprobable** cuando
$$(\forall w \in \Omega)\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Además se cumple que: $(\forall A \subseteq \Omega)\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Proposición 2.

[Inclusión-exclusión] *Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$. Entonces*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} Ai\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) - \cdots - (-1)^n \mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

Propuesto

Prop 1 La probabilidad que una persona viaje a Buenos Aires durante un año es de un 0,47, la probabilidad que viaje a Miami es de un 0,38 y la probabilidad que viaje a Madrid es de un 0,20. La probabilidad que viaje a Madrid y Buenos Aires es 0,07, que viaje a Madrid y Miami es 0,08, que viaje a Buenos Aires y Miami es 0,15 y la probabilidad que viaje a los 3 lugares es 0,05. Determine la probabilidad de que la persona:

a) Viaje a alguno de los lugares.

b) Viaje solo a Madrid.

c) Viaje solo a Madrid y Miami.

Prop 2 Considere (Ω, P). Usando los axiomas deduzca las siguientes propiedades:

a) Compruebe que $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$

b) Sea $A \subseteq \Omega$ un evento tal que $\mathbb{P}(A) = 1$. Pruebe que para cualquier otro evento $B \subseteq \Omega$, se tiene que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

P1 a) El espacio muestral tendrá todos los posibles resultados, en este caso

$$\Omega = \{ (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1) \}$$

Obs: ¿Por qué usamos $(1,2,3)$ y no $\{1,2,3\}$?

R: Porque $\{\ \} \longrightarrow$ Sin orden (Conjunto)

$(\ ,\ ,\ ) \longrightarrow$ Con orden N-tuplas

b) Estamos en un espacio equiprobable

$$\Rightarrow A \subset \Omega \qquad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$A_i = (\ldots, i, \ldots) \Rightarrow |A_i| = 2$$

$$\Rightarrow P(A_i) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{Para } i \in \{1,2,3\}$$

$$A_i \cap A_j = \{ \text{el } i\text{-ésimo en la posición } i \text{ y } j\text{-ésimo en la posición } j \}$$

Obs: Si i en la i-ésima y j en ... j-ésima

$\Rightarrow$ la otra también estará bien

$\Rightarrow$ $(1,2,3)$ es la única posibilidad

$$\Rightarrow \boxed{P(A_i \cap A_j) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6} \quad \forall i \neq j}$$

Al menos uno esté correcto es $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$$

$+ \; P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3} - \underbrace{3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}}_{-\frac{1}{3}}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{P2}$ a <u>Cosas importantes</u>: - Se reponen
- Importa el orden

Usar 2-tuplas y se pueden repetir

$$\Omega = \{ (a_1, a_2) : a_i \in \{R, V, A\} \}$$

$$|\Omega| = 9$$

b) Ahora <u>no se puede repetir</u>

$\Omega' =$ opción 1: Hacer a mano

$$\Omega' = \left\{ (a_1, a_2) \;:\; \begin{array}{l} a_i \in \{R, V, A\} \\ a_1 \neq a_2 \end{array} \right\}$$

$$\Omega' = \left\{ (a_1, a_2) \;:\; \begin{array}{l} a_i \in \{R, V, A\} \\ a_i \neq a_j \text{ para } i \neq j \end{array} \right\}$$

$\boxed{P3}$ $P(DB) = 0.75$

$P(HM) = 0.65$

$P(DB \cap HM) = 0.5$

a) $P(DB \cup HM) \overset{PIE}{=} P(DB) + P(HM) - P(DB \cap HM)$

Vez Alguno

$\Rightarrow P(DB \cup HM) = 0.75 + 0.65 - 0.5$

$= \boxed{0.9}$

b) Solo DB $\Rightarrow HM^c$

$\Rightarrow DB \cap HM^c$

$P(DB \cap HM^c) = P(DB) - P(DB \cap HM$

$= 0.75 - 0.5$

$\Rightarrow \boxed{P(DB \cap HM^c) = 0.25}$

P4

$A \cup B \supset A \supset A \cap B$

$\supset B \supset$

$\Rightarrow P(A \cup B) \geq P(A) \geq P(A \cap B)$

Monotonía

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) = P(A \cap B)$

Similar con $P(B)$

$\Rightarrow P(A) = P(B) = P(A \cup B) = P(A \cap B)$

b) Usando que $P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$

Cuando $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Como $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = P(\Omega) = 1$$

Supongamos que $P(A_i) > \frac{1}{N}$

$\forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} P(A_i) > N \cdot \frac{1}{N} = 1 \ \times$$

pues es igual a 1

$$\Rightarrow \exists \hat{i} \in \{1, \dots, N\} \text{ tq } P(A_{\hat{i}}) \leq \frac{1}{N}$$

c) De igual manera suponiendo que

$P(A_i) < \frac{1}{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$\sum_{i=1}^{N} P(A_i) < N \cdot \frac{1}{N} = 1$$

$\times \Rightarrow \exists \tilde{i} \in \{1, \dots, N\}$

tal que $P(A_{\tilde{i}}) \geq \frac{1}{N}$

Propuesto

1

La probabilidad que una persona viaje a Buenos Aires durante un año es de un 0,47, la probabilidad que viaje a Miami es de un 0,38 y la probabilidad que viaje a Madrid es de un 0,20. La probabilidad que viaje a Madrid y Buenos Aires es 0,07, que viaje a Madrid y Miami es 0,08, que viaje a Buenos Aires y Miami es 0,15 y la probabilidad que viaje a los 3 lugares es 0,05. Determine la probabilidad de que la persona:

a) Viaje a alguno de los lugares.

b) Viaje solo a Madrid.

c) Viaje solo a Madrid y Miami.

$P(BA) = 0.47$ $\quad P(BA \cap Ma) = 0.07$

$P(Mi) = 0.38$ $\quad P(Ma \cap Mi) = 0.08$

$P(Ma) = 0.2$ $\quad P(BA \cap Mi) = 0.15$

$P(BA \cap Mi \cap Ma) = 0.05$

a) $P(BA \cup Mi \cup Ma) = P(BA) + P(Mi) + P(Ma)$

$- P(BA \cap Ma) - P(BA \cap Mi) - P(Ma \cap Mi)$

$+ P(BA \cap Mi \cap Ma)$

$= 1.05 - 0.3 + 0.05$

$= \boxed{0.8}$

b) $P(Ma \cap BA^c \cap Mi^c) = P(Ma \setminus (BA \cup Mi))$

$= P(Ma) - P(Ma \cap (BA \cup Mi))$

$= P(Ma) - P((Ma \cap BA) \cup (Ma \cap Mi))$

$$= P(M_A) - [P(M_A \cap B_A) + P(M_A \cap M_i) - P(M_A \cap B_A \cap M_i)]$$

$$= P(M_A) + P(M_A \cap B_A \cap M_i) - P(M_A \cap B_A) - P(M_A \cap M_i)$$

$$= 0.2 + 0.05 - 0.07 - 0.08 = \boxed{0.1}$$

c) $P(M_i \cap M_A \cap B_A^c) = P(M_i \cap M_A) - P(M_A \cap M_i \cap B_A)$

$$= 0.08 - 0.05$$

$$= \boxed{0.03}$$

Propuesta 2

Considere (Ω, P). Usando los axiomas deduzca las siguientes propiedades:

a) Compruebe que $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$

b) Sea $A \subseteq \Omega$ un evento tal que $\mathbb{P}(A) = 1$. Pruebe que para cualquier otro evento $B \subseteq \Omega$, se tiene que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

a) $A \cap B^c \subset B^c$

$A^c \cap B \subset B$ $\Rightarrow$ $(A \cap B^c) \cap (A^c \cap B) = \emptyset$

$$\Rightarrow P((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)) \overset{\text{disjuntos, Axioma Suma}}{=} P(A\cap B^c) + P(B\cap A^c) \quad ☺$$

$$P(X\cap Y^c) + P(X\cap Y) \overset{\text{disjuntas, Axioma Suma}}{=} P((X\cap Y^c)\cup(X\cap Y))$$

$$= P(\underbrace{X\cap(Y^c\cup Y)}_{X})$$

$\boxed{\text{Usando esto}}$

$$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$$

$$P(A^c\cap B) = P(B) - P(A\cap B) \quad (\star)$$

$(\star + ☺)$

$$\Rightarrow P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) \quad \blacksquare$$

b) $P(A\cup B) \geq P(A) = 1$

$$\underbrace{P(A\cup B)}_{1} = \underbrace{P(A)}_{1} + P(B) - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = P(A\cap B)}$$