MA3403-3. Probabilidades y Estadística.
Profesor: Servet Martínez.
Auxiliar: Sebastián López.
Fecha: Jueves 23 de Junio, 2022.

Auxiliar 14: Repaso Examen.

Resumen

- Función de **densidad condicional** de X en x, dado $Y=y$:
$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$
- **Esperanza Condicional**
$$\mathbb{E}(g(X)|Y=y) := \int g(x) f_{X|Y}(x|y)dx.$$
- Se define la v.a. esperanza condicional de $g(X)$ dado Y, como $\mathbb{E}(g(X)|Y)(\omega) := \mathbb{E}(g(X)|Y=Y(\omega))$.
- $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X)|Y))$.
- **Covarianza**: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- $\mathrm{Cov}(\alpha+\beta X, \gamma+\delta Y) = \beta\delta\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- **Correlación** $\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$.
- Para $\vec{X} = (X_1,\dots,X_n)$, se tiene $\vec{\mu} = \mathbb{E}(\vec{X})$ y su matriz de covarianza
$$\mathrm{Cov}(\vec{X}) = \mathbb{E}((\vec{X}-\vec{\mu})(\vec{X}-\vec{\mu})^\top).$$
- El vc.a. $\vec{X} = (X_1,\dots,X_n)$ distribuye según una **Normal Multivariada** de media $\vec{\mu}$ y matriz de varianza-covarianza Σ, denotado $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu},\Sigma)$, si es a.c. y su densidad está dada por
$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = (2\pi)^{-n/2}|\det\Sigma|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^\top\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}.$$
- Para $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu},\Sigma)$ se tiene $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_{i,i})$.

Problemas

P1. La densidad conjunta de X, Y viene dada por:
$$f_{X,Y}(x,y) = xe^{-x(y+1)}\mathbb{1}_{x>0,y>0}(x,y)$$

a) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y=y)$ y $\mathbb{E}(Y|X=x)$.

c) Calcule $\mathbb{E}(X)$ usando lo anterior.

d) Encuentre la densidad de $Z = XY$.

P2. Sean X e Y variables aleatorias con media común μ, varianzas respectivas σ_X^2 y σ_Y^2, y covarianza $C(X,Y)$, todas ellas conocidas. Encuentre $\alpha \in \mathbb{R}$ donde la variable aleatoria $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$ alcanza la varianza mínima.

P3. Considere $\vec{X} = (X_1, X_2)$ vector aleatorio normal bivariado con densidad
$$f_{\vec{X}}(x) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{5}{16}x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2\right)$$

a) Encuentre el vector de medias μ y la matriz de varianza-covarianza Σ.

b) ¿Cuáles son las densidades marginales f_{X_1}, f_{X_2} de X_1 y de X_2 respectivamente?

c) Calcule la correlación $\mathrm{Corr}(X_1, X_2)$.

d) Calcule la densidad condicional $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ de X_1 en x_1 dado $X_2 = x_2$.