MA3403-3. Probabilidades y Estadística.
Profesor: Servet Martínez.
Auxiliar: Sebastián López.
Fecha: Jueves 09 de Junio, 2022.

Auxiliar 12: Vectores aleatorios.

Resumen

- Función de **distribución marginal** para 2 variables:
$$F_X(x) := F_{X,Y}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)dvdu$$
- Función de **densidad marginal** para 2 variables:
$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v)dv$$
- **Teo. Cambio de Variable multidimensional.** Sea (X,Y) vc.a. con densidad conjunta $f_{X,Y}$. Sea $(U,V) = h(X,Y)$, tal que h es a derivada continua y Jacobiano distinto de 0:
$$f_{U,V}(u,v) = \sum_{x,y\in h^{-1}(u,v)} |\det(J_h(x,y)|^{-1} f_{X,Y}(x,y)$$
Si además h es inyectiva:
$$f_{U,V}(u,v) = |\det(J_h(h^{-1}(u,v))|^{-1} f_{X,Y}(h^{-1}(u,v)) = |\det(J_{h^{-1}}(u,v))| f_{X,Y}(h^{-1}(u,v)).$$

Problemas

P1. Sean X,Y v.a.'s con densidad conjunta:
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}, \quad x,y\geq 1.$$
Calcule la densidad conjunta $f_{U,V}$ con $U = XY$, $V = \frac{X}{Y}$.

P2. Sean $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ un vector aleatorio bidimensional con función de densidad conjunta dada por
$$f_{X,Y}(x,y) = k(x+y)\mathbb{1}_{(x,y)\in(0,1)^2}.$$

a) Determine el valor de k.

b) Determine la función de distribución conjunta.

c) Calcule las funciones de densidad marginales de X y de Y. ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

P3. Fije $\theta\in\mathbb{R}$. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución Uniforme en el intervalo $\left(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}\right)$. Pruebe que la distribución de la variable aleatoria $Z = X - Y$ no depende de θ y para ello encuentre su densidad f_Z.