MA3403-3. Probabilidades y Estadística.
Profesor: Servet Martínez.
Auxiliar: Sebastián López.
Fecha: Jueves 26 de Mayo, 2022.

Auxiliar 10: Función generadora de momento y Función característica.

Resumen

- X v.a. tal que $X \geq 0$.
  FGM: $\Theta_X : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$; $\Theta_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX})$.
- $\Theta_X(s) \in (0,1]$, $\Theta_X(0) = 1$.
- $\Theta_{\alpha+\beta X}(s) = e^{-\alpha s}\Theta_X(\beta s)$.
- $X_1, ..., X_n \geq 0$ indep. $\Rightarrow \Theta_{\sum_{i=1}^n X_i}(s) = \prod_{i=1}^n \Theta_{X_i}(s)$.
- $\mathbb{E}(X^r) < \infty \Rightarrow \forall l \leq r : \mathbb{E}(X^l) = (-1)^l \dfrac{d^l\Theta_X}{ds^l}(0)$.
- $F_X = F_Y \iff \Theta_X = \Theta_Y$.
- X v.a. :
  FC: $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.
- $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
- $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_{-X}(t)$.
- Las propiedades de la FC son análogas a las de la FGM.

Problemas

P1. Definimos la función generadora de momentos de X como

$$\Phi_X(t) := \mathbb{E}(e^{-tX}).$$

a) Sea X una variable aleatoria Bernoulli de parámetro p. Calcule su función generadora de momentos.

b) Sea Y una variable aleatoria Binomial(n,p). Calcule su función generadora de momentos.

c) ¿ Existe alguna relación entre las funciones de X e Y?

P2. Sea $X \sim$ Gamma(α, β).

a) Muestre que su f.g.m. satisface $\Theta_X(s) = \left(\frac{s}{\beta} + 1\right)^{-\alpha}$ para $s \geq 0$.

b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes con $X_k \sim$ Gamma(α_k, β). Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^n X_k \sim \text{ Gamma}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k, \beta\right).$$

P3. Considere $X \sim$ Poisson(λ).

a) Calcule la función generadora de momentos de X, es decir, $\Theta_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX})$, para $s \geq 0$.

b) Sean ahora $X_i \sim$ Poisson$(\lambda_i), i = 1, ..., n$ independientes y defina $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$. Muestre que $Y \sim$ Poisson(η) y especifique el valor de η.

P4. Una v.a. simetrizada de X que se nota X^s está definida por $X^s = X - Y$, donde Y es una v.a. independiente de X y con su misma distribución $F_X = F_Y$. Pruebe que si $\varphi_X(t)$ es la función característica de X entonces la función característica de X^s es $|\varphi_X(t)|^2$.