MA3403-3. Probabilidades y Estadística.
Profesor: Servet Martínez.
Auxiliar: Sebastián López.
Fecha: Jueves 28 de Abril, 2022.

Auxiliar 7: Distribuciones y densidades.

Resumen

- $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ es **función de distribución** si:
  - $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.
  - $F(x) = F(x^+)$.
  - $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$.
- Para X v.a. se tiene $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Además, F_X continua en x ssi $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ función de distribución se dice **absolutamente continua** si existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada **densidad**, tal que:
  - $f \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.
  - $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)du$.
- $f(x) = \dfrac{dF}{dx}(x)$ c.s.
- **Teo. Cambio de Variable** Sea X v.a. abs.cont. con densidad f_X. Entonces $Y = h(X)$ es v.a. abs. cont. y su densidad verifica:
  - $f_Y(y) = \sum_{x_y \in h^{-1}(y)} |h'(x_y)|^{-1} f_X(x_y)$.

Problemas

P1. Sea X la v.a. constante igual a 0, es decir $X \equiv 0$. Muestre que la función de distribución F_X de la v.a. X está dada por la función de Heavyside $\mathcal{H}$, es decir:

$$F_X(x) = \mathcal{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Generalizando, encuentre la distribución F_Y de una v.a constante $Y \equiv a$.

P2. *a*) Sea U una v.a. que distribuye Uniforme(0,1). Definamos la v.a. $X = aU + b$, con $a \neq 0$. Usando el teorema de cambio de variable, encuentre la distribución F_X y la densidad f_X de la v.a. X.

b) Sea X una v.a. que distribuye Normal(μ,σ^2). Definamos la v.a. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Usando el teorema de cambio de variable, encuentre la distribución F_Z y la densidad f_Z de la v.a. Z.

c) Sea X una v.a. que distribuye Exp(λ). Definamos la v.a. $Y = \lambda X$. Usando el teorema de cambio de variable, encuentre la distribución F_Y y la densidad f_Y de la v.a. Y.

P3. Sea X v.a. abs.cont. con densidad $f_X(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$; para $x \in \mathbb{R}$.

a) Demuestre que $|X|$ es exponencial(λ).

b) Sea $Y = \text{signo}(X)$. Muestre que Y es independiente de $|X|$.