Pauta T1

P1) a) • $\emptyset, \Omega \in \mathcal{N}$ pues $\mathbb{P}(\emptyset)=0$, $\mathbb{P}(\Omega)=1$

• Sea $B \in \mathcal{N}$

i) $\mathbb{P}(B)=0 \Rightarrow \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 \Rightarrow B^c \in \mathcal{N}$

ii) $\mathbb{P}(B)=1 \Rightarrow \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow B^c \in \mathcal{N}$

• Sea $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}$ PDQ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{N}$

i) Supongamos que $\mathbb{P}(B_n)=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$$

$$\therefore \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big)=0 \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{N}$$

ii) Si no, $\exists n_0$ tq $\mathbb{P}(B_{n_0})=1$

$$\Rightarrow B_{n_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \Rightarrow \mathbb{P}(B_{n_0}) = 1 \leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big)$$

$$\therefore \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big)=1 \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{N}$$

$\therefore \mathcal{N}$ es σ-alg ∎

b) PDQ $B \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathbb{P}(B\cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B)$

$\Rightarrow)$ $B\in\mathcal{N}$: i) $\mathbb{P}(B)=0 \Rightarrow \mathbb{P}(B\cap B) = \mathbb{P}(B) = 0 = 0\cdot 0 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B)$ ✓

ii) $\mathbb{P}(B)=1 \Rightarrow \mathbb{P}(B\cap B) = \mathbb{P}(B) = 1 = 1\cdot 1 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B)$ ✓

$\Leftarrow)$ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B)$

luego $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)^2$, con $\mathbb{P}(B) \in [0,1]$

$\therefore \mathbb{P}(B)=0 \lor \mathbb{P}(B)=1 \Rightarrow B\in\mathcal{N}$ ∎

P2) Por inducción sobre N:

CB $N=2$) Def A_i el asiento en que se siente la persona i, $i \in \{1..N\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_2=2) = \mathbb{P}(A_2=2 \mid A_1=1)\mathbb{P}(A_1=1) + \mathbb{P}(A_2=2 \mid A_1=2)\mathbb{P}(A_1=2)$$

$$= 1 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 = 1/2 \,//$$

HI) Suponga hay K pasajeros $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A_K=K)=1/2$
$K \in \{2 \dots N-1\}$

PI) PDQ) Si hay N pasajeros $\Rightarrow \mathbb{P}(A_N=N)=1/2$

$$\mathbb{P}(A_N=N) = \sum_{K=1}^{N} \mathbb{P}(A_N=N \mid A_1=K)\mathbb{P}(A_1=K)$$

$$= \sum_{K=1}^{N} \mathbb{P}(A_N=N \mid A_1=K) \cdot 1/N$$

- Notemos que si A_1 se siente en el asiento K, entonces todos los pasajeros desde el 2 hasta el $K-1$, se sentarán en sus asientos. Cuando entre el pasajero K verá su asiento ocupado, y quedarán $N-(K-1)$ asientos libres los cuales serán los asientos $1, K+1, K+2, \dots, N$.

Esto es equivalente a repetir la dinámica inicial, pues el pasajero K toma el rol del pasajero 1, y toma un asiento al azar, y los demás siguen las reglas descritas.

La dinámica es la misma, pero ahora con $N-(K-1)$ personas, $K \in \{2 .. N-1\}$

Por HI: $\mathbb{P}(A_N=N \mid A_1=K) = 1/2 \quad \forall K \in \{2 \dots N-1\}$

- Si es que $A_1=1$, entonces $\mathbb{P}(A_N=N \mid A_1=1)=1$, pues todos se sienten ordenados
- Si es que $A_1=N$, entonces $\mathbb{P}(A_N=N \mid A_1=N)=0$, pues el asiento N está ocupado

$$\therefore \mathbb{P}(A_N=N) = \mathbb{P}(A_N=N \mid A_1=1)\cdot 1/N + \sum_{K=2}^{N-1} \mathbb{P}(A_N=N \mid A_1=K)\cdot 1/N + \mathbb{P}(A_N=N \mid A_1=N)\, 1/N$$

$$= 1/N + 1/N \cdot 1/2\,(N-2) + 0 = \frac{N \cdot 1/2}{N} = 1/2 \quad \blacksquare$$

P3) Def B_i las bolas blancas en la urna i, N_i las negras en la urna i

a) $i \in \{1, 2\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_1 = K) = \sum_{s=0}^{N} \mathbb{P}(B_1 = K \mid N_1 = s)\mathbb{P}(N_1 = s)$$

- Notemos que para cualquier $s > N-K$: $\mathbb{P}(B_1 = K \mid N_1 = s) = 0$, pues ya no caben K bolas

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_1 = K) = \sum_{s=0}^{N-K} \mathbb{P}(B_1 = K \mid N_1 = s)\, \mathbb{P}(N_1 = s)$$

- Por otro lado, si $N_1 = s$, entonces eso implica que $B_1 = N-s$, pues se debe llenar la urna. Equivalentemente, si $B_1 = K \Rightarrow N_1 = N-K$ obligadamente

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_1 = K) = \mathbb{P}(B_1 = K \mid N_1 = N-K)\mathbb{P}(N_1 = N-K) = \mathbb{P}(N_1 = N-K)$$

Por argumento combinatorial, debo elegir K bolas blancas de las N disponibles, $N-K$ negras de las N disponible, y eso sobre todas las posibilidades de elegir N bolas de entre $2N$ disponibles:

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_1 = K) = \mathbb{P}(N_1 = N-K) = \frac{\binom{N}{K}\binom{N}{N-K}}{\binom{2N}{N}} \quad \blacksquare$$

b) Denotemos X a la primera extracción, sabemos $X = B$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_1 = K) = \mathbb{P}(B_1 = K \mid X = B)\, \mathbb{P}(X=B)^{\to 1} + \mathbb{P}(B_1 = K \mid X = N)\, \mathbb{P}(X=N)^{\to 0}$$

$$= \mathbb{P}(B_1 = K \mid X = B)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = B \mid B_1 = K)\, \mathbb{P}(B_1 = K)}{\mathbb{P}(X = B)}$$

$$= \frac{K/N \cdot \mathbb{P}(B_1 = K)}{\sum_{K=0}^{N} \mathbb{P}(X=B \mid B_1 = K)\, \mathbb{P}(B_1 = K)}$$

$$= \frac{K/N \cdot \mathbb{P}(B_1 = K)}{\sum_{i=0}^{N} i/N \cdot \mathbb{P}(B_1 = i)}$$

$$= \frac{K \cdot \frac{\binom{N}{K}\binom{N}{N-K}}{\binom{2N}{N}}}{\sum_{i=0}^{N} i \frac{\binom{N}{i}\binom{N}{N-i}}{\binom{2N}{N}}}$$

$$= \frac{K\binom{N}{K}\binom{N}{N-K}}{\sum_{i=0}^{N} i \binom{N}{i}\binom{N}{N-i}} \quad \blacksquare$$