

Control 1 PyE

PJ) i) $P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)^c)$
 $= 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c)$
 $= 1 - P(A^c | B^c \cap C^c) P(B^c \cap C^c)$
 $= 1 - P(A^c | B^c \cap C^c) P(B^c | C^c) P(C^c) //$

ii). Por doble implicancia:

$\Rightarrow P(A|B) \geq P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq P(A)$
 $\Rightarrow \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \geq P(A) \quad / \cdot \frac{1}{P(A)}$
 $\Rightarrow \frac{P(B|A)}{P(B)} \geq 1$
 $\Rightarrow P(B|A) \geq P(B) //$

$\Leftarrow$ Desarrollo análogo a la implicancia anterior //

• PDQ) Si $P(A|B) \geq P(A) \Rightarrow P(A^c|B) \leq P(A^c)$

$$P(A|B) \geq P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq P(A) \Rightarrow \frac{P(B) - P(B \cap A^c)}{P(B)} \geq P(A)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{P(B \cap A^c)}{P(B)} \geq 1 - P(A^c)$$

$$\Rightarrow 1 - P(A^c|B) \geq 1 - P(A^c)$$

$$\Rightarrow -P(A^c|B) \geq -P(A^c) \quad / \cdot -1$$

$$\Rightarrow P(A^c|B) \leq P(A^c) //$$

P2) i) Por induccion:

CB $n=1$ Si hay 1 persona y 1 sombrero:

$$P(S_1=1) = 1 = 1/1 \quad \checkmark \quad * \text{Aquí Si es el sombrero que tome la persona } i$$

HI Si hay $n-1$, personas $\Rightarrow \forall k \in \{1 \dots n-1\}$

$$P(S_k = k) = 1/(n-1)$$

PI PDQ Si hay n personas, entonces $\forall k \in \{1 \dots n\}$: $P(S_k = k) = 1/n$

• Como hay n personas y sombreros, cuando la primera persona se para, solo tiene 1 opción de sombrero correcta

$$\Rightarrow P(S_1 = 1) = 1/n, \quad P(S_1 \neq 1) = \frac{n-1}{n}$$

• Para $k \in \{2 \dots n\}$, luego de que se para la primera persona, quedan $n-1$ personas y sombreros, luego recuperamos la HI. Sin embargo, hay 3 casos posibles:

- la persona 1 saca su sombrero: $S_1 = 1$
- la persona 1 no saca su sombrero, pero saca el de k : $S_1 \neq 1, S_1 = k$
- la persona 1 no saca su sombrero ni el de k : $S_1 \neq 1, S_1 \neq k$

$$\Rightarrow P(S_k = k) = P(S_k = k | S_1 = 1)P(S_1 = 1) + P(S_k = k | S_1 \neq 1, S_1 = k)P(S_1 \neq 1, S_1 = k) \\ + P(S_k = k | S_1 \neq 1, S_1 \neq k)P(S_1 \neq 1, S_1 \neq k)$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)n} + \frac{n-2}{(n-1)n} = \frac{n-1}{(n-1)n} = \frac{1}{n} \quad \square$$

• Veamos la prob de que nadie seque su sombrero.

Notemos que "que nadie seque su sombrero" es el complemento de "que alguien seque su sombrero", es decir

$$\forall K: S_K \neq K \iff \neg(\exists K: S_K = K)$$

luego, notemos que el evento "que alguien seque su sombrero" es la unión no-disjunta de los eventos $S_K = K$

$$\Rightarrow [\exists K \in \{1, \dots, n\}: S_K = K] = \bigcup_{K \in \{1, \dots, n\}} (S_K = K)$$

Por último, por principio de inclusión-exclusión:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{K=1}^n (S_K = K)\right) = \sum_{K=1}^n (-1)^{K+1} \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=K}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} (S_i = i)\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \underline{n=2} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{K=1}^2 (S_K = K)\right) &= \sum_{K=1}^2 (-1)^{K+1} \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1, 2\} \\ |J|=K}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} (S_i = i)\right)\right) \\ &= \mathbb{P}(S_1=1) + \mathbb{P}(S_2=2) - \mathbb{P}(S_1=1 \cap S_2=2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{luego } \mathbb{P}(\forall K: S_K \neq K) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \underline{n=3} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{K=1}^3 (S_K = K)\right) &= \sum_{K=1}^3 (-1)^{K+1} \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1, 2, 3\} \\ |J|=K}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} (S_i = i)\right)\right) \\ &= \mathbb{P}(S_1=1) + \mathbb{P}(S_2=2) + \mathbb{P}(S_3=3) - \mathbb{P}(S_1=1 \cap S_2=2) - \mathbb{P}(S_1=1 \cap S_3=3) \\ &\quad - \mathbb{P}(S_2=2 \cap S_3=3) + \mathbb{P}(S_1=1, S_2=2, S_3=3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= 1 - \frac{2}{6} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{P}(\forall K: S_K \neq K) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{P\left(\bigcup_{k=1}^4 S_k = K\right)}^{n=4} &= \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1,2,3,4\} \\ |J|=k}} P\left(\bigcap_{i \in J} S_i = i\right) \right) \\
 &= P(S_1=1) + P(S_2=2) + P(S_3=3) + P(S_4=4) - P(S_1=1, S_2=2) - P(S_1=1, S_3=3) \\
 &\quad - P(S_1=1, S_4=4) - P(S_2=2, S_3=3) - P(S_2=2, S_4=4) - P(S_3=3, S_4=4) \\
 &\quad + P(S_1=1, S_2=2, S_3=3) + P(S_1=1, S_2=2, S_4=4) + P(S_1=1, S_3=3, S_4=4) \\
 &\quad + P(S_2=2, S_3=3, S_4=4) - P(S_1=1, S_2=2, S_3=3, S_4=4) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{24} - \frac{2}{24} - \frac{2}{24} - \frac{2}{24} - \frac{2}{24} - \frac{2}{24} \\
 &\quad + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} \\
 &= 1 - \frac{9}{24}
 \end{aligned}$$

$$\therefore P(\forall K: S_K \neq K) = 1 - (1 - \frac{9}{24}) = \frac{9}{24} \text{ B}$$

* También lo pueden hacer por argumento combinatorial

$$\begin{aligned}
 \text{P2) (ii) } P(X \cap Y = \emptyset) &= \sum_{A \in \mathcal{P}_k(N)} P(X \cap Y = \emptyset \mid X=A) P(X=A) \\
 &= \sum_{A \in \mathcal{P}_k(N)} P(Y \subseteq A^c \mid X=A) \cdot \frac{1}{\binom{N}{k}} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(N)} P(Y \subseteq A^c) \quad * \text{independence} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{k}} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(N)} \frac{\binom{N-k}{m}}{\binom{N}{m}} \\
 &= \frac{\binom{N-k}{m}}{\binom{N}{k} \binom{N}{m}} \cdot |\mathcal{P}_k(N)| = \frac{\binom{N-k}{m} \binom{N}{k}}{\binom{N}{k} \binom{N}{m}} = \frac{\binom{N-k}{m}}{\binom{N}{m}} \quad \square
 \end{aligned}$$

P3) Sea X_i el resultado de lanzar la moneda i , y sea Y la moneda escogida:

$$\begin{aligned}
 \text{i) } P(X_Y = 1) &= \sum_{k=1}^n P(X_Y = 1 \mid Y=k) P(Y=k) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(X_k = 1) P(Y=k) \\
 &= \sum_{k=1}^n p_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n} \quad //
 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } P(Y=k \mid X_Y = 1) = \frac{P(X_Y = 1 \mid Y=k) P(Y=k)}{P(X_Y = 1)} = \frac{p_k \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n p_k} = \frac{p_k}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad \square$$