

MA3403-3. Probabilidades y Estadística.**Profesor:** Servet Martínez.**Auxiliar:** Sebastián López.**Fecha:** Jueves 21 de Abril, 2022.**Auxiliar 6: Variables aleatorias.**

X	Parámetros	Rango	Densidad
Bernoulli(p)	$p \in [0, 1]$	$\{0, 1\}$	$p_X(0) = 1 - p, p_X(1) = p$
Binomial(n, p)	$n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
Geométrica(p)	$p \in [0, 1]$	$\{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$p_X(k) = p(1 - p)^{k-1}$
Poisson(λ)	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Problemas**P1.** Sea $X : \Omega \rightarrow I$ una v.a. discreta, $h : I \rightarrow J$ una función.Muestre que $h \circ X$ es una v.a. discreta a valores en $h(I)$ tal que:

$$\mathbb{P}(h \circ X = j) = \sum_{i \in I: h(i)=j} \mathbb{P}(X = i)$$

P2. Sean $(X_n : n \in \mathbb{N})$ v.a.'s independientes, todas distribuidas igual $X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$. Sea Z una v.a. independiente de todos los X_n , con $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Pruebe que la v.a.:

$$Y = \sum_{n=0}^Z X_n$$

distribuye $\text{Poisson}(\lambda p)$.**P3.** Suponga que usted tiene un dado equilibrado, que lanza n veces. Calcule la probabilidad de que, de esos n lanzamientos, se obtenga n_1 veces el número 1, n_2 veces el número 2, y así sucesivamente hasta n_6 veces el número 6.**P4.** Sean las familias de intervalos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{L}_2 &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Muestre que $\sigma(\mathcal{L}_1) = \sigma(\mathcal{L}_2)$. A esta σ -álgebra se le llama la *Sigma álgebra de Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.