MA3403-1. Probabilidades y Estadística.
Profesor: Servet Martínez.
Auxiliar: Sebastián López.
Fecha: Jueves 14 de Abril, 2022.

Auxiliar 5: Variables aleatorias discretas.

X	Parámetros	Rango	Densidad
Bernoulli(p)	$p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$p_X(0) = 1-p,\ p_X(1) = p$
Binomial(n,p)	$n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$	$\{0,1,...,n\}$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Geométrica(p)	$p \in [0,1]$	$\{1,2,..\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$
Poisson(λ)	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$p_X(k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Problemas

P1. Resolveremos una pregunta a elección del Control 1.

P2. Sean X, Y v.a's independientes con igual distribución, se distribuyen en $\mathbb{N} = \{1,2,...\}$ según una geométrica de parámetro $p \in (0,1)$.

a) Encuentre la densidad discreta de $X+Y$, es decir $\mathbb{P}(X+Y=n)$ para $n \geq 2$.

b) Sean $m,n \in \mathbb{N}$ con $1 < m < n$. Pruebe que

$$\mathbb{P}(X = m | X+Y = n) = \frac{1}{n-1}.$$

P3. Un compatriota luego de las fondas dieciocheras intenta volver a su casa en evidente estado de ebriedad. Para modelar esto consideramos que el borrachito se pasea sobre $\mathbb{Z}$ partiendo desde la fonda (el origen) en el instante $t = 0$. En cada instante, independiente de lo que ocurra el resto del tiempo, da un paso hacia la derecha con probabilidad p y en caso contrario hacia la izquierda. Sea X_t el entero sobre el que el borrachito se encuentra después de t instantes.
Determine (en función de p y t) la función de densidad de X_t, es decir, $\mathbb{P}(X_t = n)$.
Indicación: Piense en que si en el tiempo t el compatriota da k pasos hacia la derecha ¿dónde puede quedar?

P4. *a*) Consideremos dos variables aleatorias $X \sim \text{Binomial}(r,p),\ Y \sim \text{Binomial}(s,p)$. Supongamos que X, Y son independientes y definamos $Z = X+Y$. Demuestre que

$$Z \sim \text{Binomial}(s+r, p).$$

Indicación: Puede utilizar que $\sum_{i=0}^{a} \binom{n}{i}\binom{m}{a-i} = \binom{n+m}{a}$.

b) Consideremos dos variables aleatorias discretas $X \sim \text{Geom}(p_1),\ Y \sim \text{Geom}(p_2)$. Supongamos que son independientes y definamos $Z = \text{mín}(X,Y)$. Demuestre que $Z \sim \text{Geom}(p)$, con p por determinar.