MA3403-1. Probabilidades y Estadística.
Profesor: Servet Martínez.
Auxiliar: Sebastián López.
Fecha: Jueves 07 de Abril, 2022.

Auxiliar 4: Probabilidades totales e independencia.

Resumen

- Probabilidad Condicional: $\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
- Probabilidades Totales: $\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$
- Fórmula de Bayes: $\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_i \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$
- $A, B \in \mathcal{B}$ son independientes ssi $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{B}$ son independientes ssi $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$, donde $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$.

Problemas

P1. La hemofilia es una enfermedad genética recesiva que se produce por un defecto en el cromosoma sexual X. Denotaremos X_h a un cromosoma defectuoso, y simplemente X a uno sano.
De esta forma, una mujer con genotipo XX está sana, una con genotipo X_hX o XX_h no está enferma pero es portadora, y una con genotipo X_hX_h tiene la enfermedad.
Un hombre solo posee un cromosoma sexual de tipo X, el otro es de tipo Y y no juega ningún papel en la enfermedad. Un hombre tiene la enfermedad si su genotipo es X_hY. y está sano si su genotipo es XY.
Cada persona hereda un cromosoma sexual de cada uno de sus padres, este cromosoma se elige de manera uniforme para cada padre, e independiente entre los padres.
La señora María tiene un único hermano y este tiene hemofilia, y los padres de la señora María no tienen la enfermedad

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la señora María tenga hemofilia?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la señora María sea portadora de hemofilia?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un hijo varón de la señora María tenga la enfermedad?

d) Si la señora María tiene dos hijos varones y ninguno tiene la enfermedad ¿Cuál es la probabilidad de que ella sea portadora?

P2. Consideremos una familia de conjuntos $\{B_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{B}$ independientes. Muestre que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \mathbb{P}(B_i)]$$

P3. Se tienen dos monedas: M_1 y M_2. En estas monedas salen Cara o Sello con probabilidades p para la cara de M_1 y q para la cara de M_2; con $p < q$. Se escoge M, que es una de las dos monedas escogida al azar equiprobablemente entre M_1 y M_2. La moneda M se lanza n veces de manera independiente y en estos lanzamientos sale n veces Cara.

a) ¿Cuál es la probabilidad que la moneda escogida haya sido M_1?

b) ¿Cuál es la probabilidad que en el lanzamiento $n+1$ la moneda M también salga Cara?

P4. Se escribe en cuatro cartulina los números 1, 2, 3 y 123 respectivamente y se escoge una de ellas al azar. Sean A, B, C los eventos en que salió un número que tenía el dígito 1, 2 y 3, respectivamente. Pruebe que:

a) A, B, C son independientes de a pares.

b) A, B, C no son independientes.