MA3403-1. Probabilidades y Estadística.
Profesor: Servet Martínez.
Auxiliar: Sebastián López.
Fecha: Jueves 31 de Marzo, 2022.

Auxiliar 3: Probabilidad condicional.

Resumen

- Probabilidad Condicional: $\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
- Probabilidades Totales: $\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$
- Fórmula de Bayes: $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$
- Bayes (General): $\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_i \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$

Problemas

P1. Sea $(\Omega, \mathcal{B})$ un espacio medible. Sea $Q : \mathcal{B} \to [0,1]$ una función que verifica:

- $Q(\Omega) = 1$
- Q es aditiva, es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$ y toda familia disjunta finita de conjuntos $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}$:

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Q(B_i)$$

- Para toda familia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ decreciente y tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} Q(A_n) = 0$$

a) Pruebe que $Q(\emptyset) = 0$ y que Q es creciente, es decir, si $A, B \in \mathcal{B}$ con $A \subseteq B$, entonces $Q(A) \leq Q(B)$.

b) Pruebe que Q es medida de probabilidad.

P2. **[Monty-Hall]** En un concurso hay tres puertas, solo detrás de una de ellas hay un premio y las otras dos están vacías. Quien anima el concurso conoce la puerta que contiene el premio. Hay un concursante cuyo interés es escoger la puerta que contiene el premio, y para ello elige una de las tres puertas al azar. Antes de chequear si ella contiene el premio, el animador abre una de las otras dos puertas mostrándole al concursante que ella está vacía y acto seguido le ofrece al concursante la posibilidad de cambiar la puerta elegida por la puerta que el animador no abrió. ¿Le conviene al concursante hacer el cambio?

P3. Sea Ω un conjunto no vacío. Para $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ se definen:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

a) Pruebe que

$$\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c.$$

Si se tiene que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$, entonces se define el límite de A_n como

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

b) Demuestre que si $A_n \nearrow$ entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$; y que si $A_n \swarrow$ entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

P4. Considere el concurso siguiente: hay n puertas, una de ellas da a un cuarto conteniendo un tesoro y las $n-1$ restantes a un cuarto vacío. Hay n participantes, a cada uno de ellos se le asigna un número distinto entre 1 y n, y de manera secuencial de acuerdo al orden asignado cada participante abre una puerta distinta, hasta el momento en que uno de ellos encuentra el tesoro. Pruebe que todos los candidatos tienen la misma probabilidad $1/n$ de ganar el tesoro.