Auxiliar 2

Sigma álgebra y función de probabilidad.

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Sebastián López

- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ se llama σ-álgebra si cumple:
  i) $\Omega \in \mathcal{B}$
  ii) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$
  iii) $(A_n)_{n\in} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{B}$
- $\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0,1]$ es una medida de probabilidad si cumple:
  i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1,\ \mathbb{P}() = 0$
  ii) $(A_n)_{n\in} \subseteq \mathcal{B}$ disjuntos, entonces $\mathbb{P}(\dot{\bigcup}_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$ (σ-aditividad).
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

P1. Probaremos uno de los ejemplos vistos en clase:
Sea Ω un conjunto no vacío. Demuestre que para $\mathcal{L} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$, se tiene que:

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{A \subseteq \Omega : A \text{ numerable} \vee A^c \text{ numerable}\}.$$

P2. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sean $A, B, C \in \mathcal{B}$. Muestre que

a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

b) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B)$.

c) Dados $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, pruebe que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

P3. Sean $(\Omega, \mathcal{B})$ un espacio medible y $\Omega_0 \in \mathcal{B}$ no vacio. Pruebe que:

$$\mathcal{B} \cap \Omega_0 := \{A \cap \Omega_0 | A \in \mathcal{B}\}$$

es una σ-álgebra en Ω_0.