

P1

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 \end{aligned} \right\} F(x_1, x_2)$$

a) Equilibrios  $\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 0$   
 $-x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 \left( \frac{x_1^2}{3} - 1 \right) = 0$

$\Rightarrow (0, 0)$   
 $(\sqrt{3}, 0)$   $(-\sqrt{3}, 0)$   
 $(-\sqrt{3}, 0)$   $(\sqrt{3}, 0)$

Hay 3 equilibrios

$x_1 = 0$  o  $x_1 = \pm\sqrt{3}$

b) Para clasificarlos estudias linealización

$$JF(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 - 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow JF(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -(\lambda+1) \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1)+1 = \lambda^2 + \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$  Parte real negativa (Atracción)

Parte imaginaria  $\neq 0$  (Girando)

$(0,0)$  es una espiral Atractora

$$JF(\sqrt{3}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -(\lambda+1) \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda = 1 \quad \sigma = -2$$

Punto silla

Kernel  $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dirección de atracción

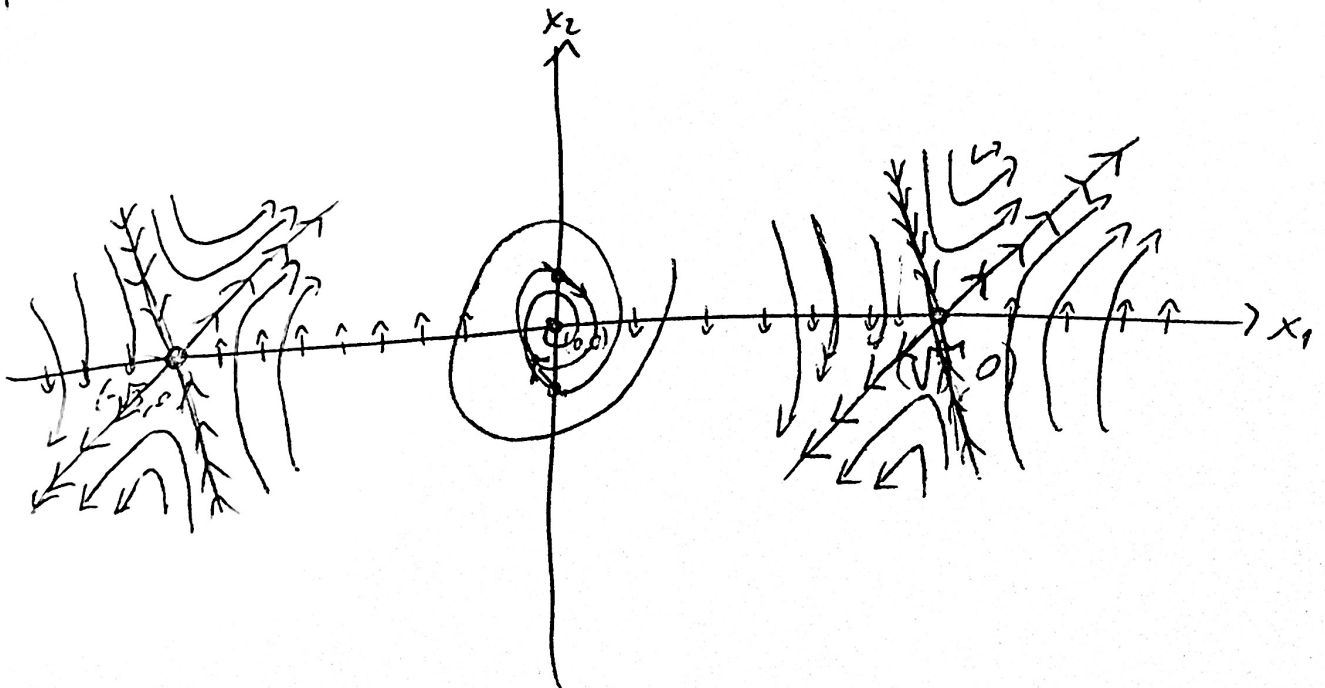
Kernel  $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dirección de repulsión

Similar  $(-\sqrt{3}, 0)$  pues  $JF(-\sqrt{3}, 0) = JF(\sqrt{3}, 0)$  (También punto silla)

Bas queye (Dibujar equilibrios direcciones de atracción, de repulsión, para espirales)



P2] a) Consejo ver si alguna condición es más sencilla

$$-3x + y^2 + 2 = 0 \quad (1) \text{ Nos dice que } x \neq y$$

$$x^2 - y^2 = 0 \quad (2) \text{ Nos dice que } |x| = |y| \text{ o } x^2 = y^2$$

$$\text{Usando } x^2 = y^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} -3x + x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = 1 \text{ o } 2$$

$$\Rightarrow \text{Si } \begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Hay 4 equilibrios } (1,1), (1,-1), (2,2), (2,-2)$$

$$b) JF(x,y) = \begin{bmatrix} -3 & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda)$$

$$JF(1,1) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -(\lambda+3) & 2 \\ 2 & -(\lambda+2) \end{pmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+2) - 4 = \lambda^2 + 5\lambda + 2$$
$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \text{Ambos negativos}$$

$\Rightarrow (1,1)$  Atrae en todas las direcciones nodo Atractor

$$JF(1,-1) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -(\lambda+3) & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = 1 \text{ o } -2$$

$(1,-1)$  punto silla

Kernel  $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 + 2v_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{dirección} \\ \text{Atracción} \end{matrix}$$



P3 a)  $\dot{y} - \frac{1}{2}x + x^3 + \beta y = 0, \quad \dot{y} = \ddot{x}$

$$\Leftrightarrow \dot{y} = \frac{1}{2}x - x^3 - \beta y$$

$$\dot{x} = y$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = y$$

$$\dot{y} = x \left( \frac{1}{2} - x^2 \right) - \beta y$$

Punto críticos

$$y = 0 \Rightarrow x \left( \frac{1}{2} - x^2 \right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  H.y 3 puntos críticos

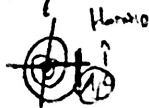
b)  $JF(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} - 3x^2 - \beta & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow JF(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\beta \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \lambda(\lambda + \beta) - \frac{1}{2}$   
 $= \lambda^2 + \beta\lambda - \frac{1}{2}$   
 $\Rightarrow \lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Uno es positivo} \\ \text{Uno es negativo} \end{matrix}$   
 $\Rightarrow (0,0)$  es punto silla  $\forall \beta > 0$

$$JF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} - \beta & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \lambda(\lambda + \beta) + \frac{1}{2} = \lambda^2 + \beta\lambda + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} \beta \in (0, 2) \text{ es } R \\ \text{y} \\ \text{es negativo} \end{matrix}$$

$\beta \in (2, \infty) \in \mathbb{C}$  y  
 parte real negativa

Siempre Atrac pero si  $\beta \in (0, 2)$  o  $\beta \in (2, \infty)$  cambia si es

espiral o nodo



Como  $JF\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = JF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$   
 Se tiene lo mismo

c) Problème  $\frac{d}{dt} E(x, y) = 0$  si  $x(t), y(t)$  sont solutions  
c'est-à-dire complètes  $\dot{x} = y$   
 $\dot{y} = x(\frac{1}{2} - x^2)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E(x, y) &= 8 \cdot 2y \cdot \dot{y} - 4 \cdot 2 \cdot x \cdot \dot{x} + 4 \cdot x^3 \cdot \dot{x} \cdot 4 \\ &= 16y \cdot (x(\frac{1}{2} - x^2)) - 8xy + 16x^3y \\ &= 8xy - 16x^3y - 8xy + 16x^3y \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow E(x, y)$  est constante sur la trajectoire