MA2601-8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Petra Zamorano y Vicente Salinas
Fecha: 26 de Mayo de 2022

Auxiliar 1 Control Recupera

P1. Considere la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(6)} + y^{(4)} - 4y'' - 4y = 0$$

Si la función $\cos(x)$ es una solución de la ecuación, encuentre una base para el espacio de soluciones.

P2. Calcule mediante coeficientes indeterminados:

$$(D+1)^2 y = 3xe^{-x} + 2e^{-x}[cos(2x) + sen(2x)]$$

P3. Encuentre dos soluciones distintas del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= \mathrm{t}^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

¿Esto contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

P4. Considere el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{(y^4+1)^{\frac{1}{5}}}{x^2+1} \\ y(1) &= 0 \end{cases}$$

Demuestre que existe una única solución definida para todo $x \in \mathbb{R}$

P1) Polinomio característico

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^4 - 4\lambda^2 - 4 = 0$

Como cos(x) es solución $\Rightarrow$ Sin(x) también lo es

$\Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \lambda^2 + 1$ es factor común p(λ)

$$p(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda^4-4) = (\lambda^2+1)(\lambda^2-2)(\lambda^2+2)$$

$$= (\lambda^2+1)(\lambda^2+2)(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$$

$$y_H = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + C_3 \cos(\sqrt{2}x) + C_4 \sin(\sqrt{2}x) + C_5 e^{\sqrt{2}x} + C_6 e^{-\sqrt{2}x}$$

P2) Lado izq

$$(D+1)^2 y = 0$$

Solución $\lambda = -1$ con multiplicidad 2

$$\Rightarrow e^{-x}, \quad x e^{-x}$$

$$3xe^{-x} + 2e^{-x}[cos(2x) + sen(2x)]$$

(1) (2)

$$(2) \quad 2e^{-x}[\cos(2x) + \sin(2x)]$$

$$\Rightarrow K_1 e^{-x} \cos(2x) + K_2 e^{-x} \sin(2x) = y_{p(2)}$$

$$(D+1)^2 y_{p(2)} = 2e^{-x}[\cos(2x) + \sin(2x)]$$

$$D y_{p(2)} = K_1 e^{-x}[(-1)\cos(2x) + (-2)\sin(2x)] + K_2 e^{-x}[(-1)\sin(2x) + 2\cos(2x)]$$

$$= e^{-x}\cos(2x)[2K_2 - K_1] + e^{-x}\sin(2x)[-K_2 - 2K_1]$$

$$D^2 y_{p(2)} = [2K_2 - K_1] e^{-x}\left[(-1)\cos(2x) + (-2)\sin(2x)\right] +$$

$$[-K_2 - 2K_1] e^{-x}\left[(-1)\sin(2x) + 2\cos(2x)\right]$$

$$= e^{-x}\cos(2x)\left[-4K_2 - 3K_1\right] +$$

$$e^{-x}\sin(2x)\left[4K_1 - 3K_2\right]$$

$$(D+1)^2 y_{p(2)} = e^{-x}\cos(2x)\left[-\cancel{4K_2} - 3K_1 + \cancel{4K_2} - 2K_1 + K_1\right]$$

$$-4K_1$$

$$+ e^{-x}\sin(2x)\left[\cancel{4K_1} - 3K_2 - 2K_2 - \cancel{4K_1} + K_2\right]$$

$$-4K_2$$

$$= \left[4K_1\cos(2x) - 4K_2\sin(2x)\right]e^{-x}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 = -\frac{1}{2}} \quad y \quad \boxed{K_2 = -\frac{1}{2}}$$

(1) –

$$y_{p(1)} = x^2 (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

$$\uparrow$$
$$(D+1)^2$$

$$y_{p(1)} = (c_1 x^2 + c_2 x^3) e^{-x}$$

$$y'_{p(1)} = (2c_1 x + 3c_2 x^2 - c_1 x^2 - c_2 x^3) e^{-x}$$

$$= (2c_1 x + (3c_2 - c_1) x^2 - c_2 x^3) e^{-x}$$

$$y''_{p(1)} = (2c_1 + 6c_2 x - 2c_1 x - 3c_2 x^2 - 2c_1 x - 3c_2 x^2$$
$$+ c_1 x^2 + c_2 x^3) e^{-x}$$

$$= e^{-x} (2c_1 + (6c_2 - 4c_1) x + (c_1 - 6c_2) x^2 + c_2 x^3)$$

$$(D+1)^2 y_{p(1)} = \ldots = 3x e^{-x} + 0 e^{-x}$$
$$+ 0 \cdot x^2 e^{-x} + 0 x^3 e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$y_{p(1)} = C_2 x^3 e^{-x}$$

$$y'_{p(1)} = C_2(3x^2 - x^3)e^{-x}$$

$$y''_{p(1)} = C_2(6x - 6x^2 + x^3)e^{-x}$$

$$(D+1)^2 y_{p(1)} = 6x \cdot C_2 e^{-x} = 3xe^{-x}$$

$$\Rightarrow C_2 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$y_{p(1)} = \frac{x^3}{2} e^{-x}$$

$$y = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{x^3}{2} e^{-x} + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x}$$

$$\cdot \left(\cos(2x) + \sin(2x)\right)$$

P3) $x \equiv 1$ es solución

$x' = t^{\frac{1}{3}} (x-1)^{\frac{1}{3}}$, v.s

$x' \cdot (x-1)^{-\frac{1}{3}} = t^{\frac{1}{3}}$ $\int dt$

$(x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C$

$2(x-1)^{\frac{2}{3}} = t^{\frac{4}{3}} + K$

$(x-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{t^{\frac{4}{3}} + K}{2}$ $(\ )^{\frac{3}{2}}$

$x-1 = \frac{\left(t^{\frac{4}{3}} + K\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{8}}$

$x = \left(\frac{t^{\frac{4}{3}} + K}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{3}{2}} + 1$

$$1 = x(0) = \frac{K^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{8}} + 1 \Rightarrow K = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{t^2}{\sqrt{8}} + 1}$$

No, lo que sucede es que no se cumple la hipótesis

$$f(t,x) = t^{\frac{1}{3}} (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$f(t,\cdot)$ No es lipschitz en x

$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = t^{\frac{1}{3}} \cdot (x-1)^{-\frac{2}{3}}$ lo cual explota

en $x = 1$

$\boxed{P4}$ $\quad y' = \dfrac{(y^4+1)^{\frac{1}{5}}}{x^2+1}$

$$f(x,y) = \frac{(y^4+1)^{\frac{1}{5}}}{x^2+1}$$, es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Lipschitz en y?</u>

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{(y^4+1)^{\frac{4}{5}}} \cdot 4y^3$$

$$\frac{1}{x^2+1} \in [0,1] \quad , \quad \underbrace{\frac{4y^3}{(y^4+1)^{\frac{4}{5}}}}_{h(y)} \quad \text{es Acotada}$$

$$h(y)^5 = \frac{y^{15}}{(y^4+1)^4} = \frac{y^{15}}{y^{16} + \ldots\ldots + 1}$$

$y^{16} \geq |y^{15}|$ sempre $|y| > 1$

$1 \geq |y^{15}|$ si $|y| \leq 1$

$1 + y^{16} \geq |y^{15}| \Rightarrow \dfrac{|y^{15}|}{1+y^{16}} \leq 1$

$\Rightarrow \dfrac{|y^{15}|}{\ldots + 1 + y^{16} + \ldots} \leq 1$

$\Rightarrow h(y)^5 \in [-1, 1]$

$\Rightarrow h(y) \in [-1, 1]$

$\Rightarrow 4\, h(y) \in [-4, 4]$

$\Rightarrow \dfrac{4y^3}{(y^4+1)^{\frac{4}{5}}} \in [-4, 4]$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 4 \implies \text{TVM}$$

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq 4 \cdot (y_1 - y_2)$$

$\implies f(x, \cdot)$ es lipschitz

$\implies$ TEU y hay una única solución