MA2601-8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Petra Zamorano y Vicente Salinas
Fecha: 26 de Mayo de 2022

Auxiliar 12: Repaso C3- Solución P4 + Resumen Sistemas Lineales

P1. Calcule las transformadas inversas de las siguientes funciones en el dominio de Laplace:

a) $G(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^2-7} + \frac{4s}{s^2+2} + \frac{e^{-2s}}{s}$

b) $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+2s-1}$

c) $G(s) = \ln\left(\frac{s-3}{s+1}\right)$

d) $G(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$

P2. Use transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = \begin{cases} 1 & \text{si } 5 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = y'(0) = 0$.

P3. Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

P4. Resuelva el siguiente sistema lineal, especificando su matriz fundamental canónica:

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz fundamental canónica vendrá dada por $\Phi(t) = e^{At}$ (acá $t_0 = 0$), por lo que convendrá diagonalizar la matriz A. Los valores propios están dados por

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Luego, A es diagonalizable pues tiene 3 valores propios distintos (y es cuadrada de 3 por 3). Los vectores propios vienen dados por:

- $\lambda_1 = -1$. Encontramos (u,v,w) tal que $(A+I)(u,v,w) = (0,0,0)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ v = w = 0 \end{cases}$$

  Tomando $u = 1$, se obtiene el vector propio $(1,0,0)$.

- $\lambda_2 = 2$. Encontramos (u,v,w) tal que $(A-2I)(u,v,w) = (0,0,0)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} v = 3u \\ w = 0 \end{cases}$$

  Tomando $u = 1$, se obtiene el vector propio $(1,3,0)$.

- $\lambda_3 = 1$. Encontramos (u,v,w) tal que $(A-I)(u,v,w) = (0,0,0)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -2u + v + w = 0 \\ v + w = 0 \end{cases}$$

  Juntando las ecuaciones, se encuentra que $u = 0$ y $v = -w$. Tomando $w = 1$, se obtiene el vector propio $(0,-1,1)$.

Así, A admite la descomposición

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =: PDP^{-1}$$

Para la matriz inversa, ocupamos el algoritmo de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Con esto, la **matriz fundamental canónica** del sistema $X' = AX$ es

$$\Phi(t) = e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3} & \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3} \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} - e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, una matriz fundamental sería simplemente

$$M(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 3e^{2t} & -e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

La solución homogénea del sistema vendría entonces dada por

$$X_h(t) = \Phi(t)X(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3} & \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3} \\ 0 & e^{2t} & e^{2t}-e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}-4e^{-t}}{3} \\ e^{2t}-e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Nota importante: Si ocupan la matriz fundamental, entonces pueden 1) escribir la solución homogénea como $X_h(t) = M(t)M(0)^{-1}X_0$ (que sería equivalente a lo recién hecho) o 2) escribir la solución en forma general como $X_h(t) = M(t)C$ para $C = (C_1, C_2, C_3)$ un vector de constantes reales y luego encontrar C resolviendo el sistema $M(0)C = X(0)$.

La solución particular vendrá dada por

$$X_p(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2s} \\ -e^{2s} \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & \frac{e^{2(t-s)}-e^{-(t-s)}}{3} & \frac{e^{2(t-s)}-e^{-(t-s)}}{3} \\ 0 & e^{2(t-s)} & e^{2(t-s)}-e^{t-s} \\ 0 & 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2s} \\ -e^{2s} \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t+s} \\ -e^{t+s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t}-e^t \\ e^t-e^{2t} \end{pmatrix}$$

Así, la solución del sistema es

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}-4e^{-t}}{3} \\ e^{2t}-e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t}-e^t \\ e^t-e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}-4e^{-t}}{3} \\ 2e^{2t}-2e^t \\ 2e^t-e^{2t} \end{pmatrix}$$

■

Resumen de contenidos

Definición (Matriz fundamental). Considere el sistema lineal homogéneo $X' = A(t)X$ con condición inicial $X(t_0) = X_0$. La **matriz fundamental canónica** asociada a $X' = A(t)X$ es una matriz $\Phi(t)$ (de las mismas dimensiones que $A(t)$) cuyas columnas $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^n$ satisfacen los problemas

$$\begin{cases} \phi_k'(t) = A(t)\phi_k(t) \\ \phi_k(t_0) = e_k \end{cases}$$

Por otro lado, una **matriz fundamental** asociada a $X' = A(t)X$ es una matriz $M(t)$ (de las mismas dimensiones que $A(t)$) cuyas columnas $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^n$ satisfacen los problemas

$$\begin{cases} \psi_k'(t) = A(t)\psi_k(t) \\ \psi_k(t_0) = v_k \end{cases}$$

donde $\{v_k\}_{k=1}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Proposición. Considere el sistema lineal homogéneo $X' = A(t)X$ con condición inicial $X(t_0) = X_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

i) La matriz fundamental canónica es la única matriz que satisface:

- $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.
- $\Phi(0) = I$ (matriz identidad).
- $\Phi(t)$ es invertible para todo t.

ii) Las columnas $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^n$ de $\Phi(t)$ forman una base del espacio de soluciones de $X' = A(t)X$ con $X(t_0) = X_0$. En consecuencia, la dimensión de dicho espacio es n y la solución del sistema está dada por

$$X(t) = \Phi(t)X_0 = x_0^1\phi_1(t) + \cdots + x_0^n\phi_n(t)$$

iii) Si $M(t)$ es una matriz fundamental de $X' = A(t)X$, entonces $\Phi(t) = M(t)M(t_0)^{-1}$ es la matriz fundamental canónica de $X' = A(t)X$ y luego la solución es

$$X(t) = M(t)M(t_0)^{-1}X_0$$

Teorema (Fórmula de Variación de Parámetros). Considere el sistema lineal

$$(S)\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

i) Si Φ es la matriz fundamental canónica del sistema homogéneo $X' = A(t)X$, entonces la solución de (S) está dada por la **Fórmula de Variación de Parámetros**:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}B(s)ds$$

ii) Si M es una matriz fundamental del sistema homogéneo $X' = A(t)X$, entonces $\Phi(t) = M(t)M(t_0)^{-1}$ es la matriz fundamental canónica de $X' = A(t)X$ y la solución de (S), en virtud de i), se escribe como

$$X(t) = M(t)M(t_0)^{-1}X_0 + M(t)\int_{t_0}^{t} M(s)^{-1}B(s)ds$$

iii) Más aún, si A es una matriz **constante**, entonces $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$, es decir, $e^{A(t-t_0)}$ es la matriz fundamental canónica de $X' = AX$ y la solución de (S), en virtud de i), se escribe

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)ds$$

Teorema (Sistema lineal con A diagonalizable). Considere el sistema lineal $X' = AX + B(t)$, donde A es una matriz constante y diagonalizable, con descomposición $A = PDP^{-1}$, valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y los vectores propios $v_1, \dots, v_n$ respectivos. Entonces:

i) Una matriz fundamental de $X' = AX$ está dada por

$$M(t) = Pe^{Dt} = (e^{\lambda_1 t}v_1 | \dots | e^{\lambda_n t}v_n)$$

y luego la matriz fundamental canónica es $\Phi(t) = M(t)M(0)^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

ii) La **solución homogénea** asociada al sistema homogéneo $X' = AX$ admite las siguientes escrituras, donde $C = (C_1, \dots, C_n)$ es un vector de constantes arbitrarias reales o complejas.

$$X_h(t) = Pe^{Dt}C = C_1e^{\lambda_1 t}v_1 + \cdots + C_ne^{\lambda_n t}v_n$$

iii) La **solución particular** tiene la forma $X_p(t) = P\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{D(t-s)}P^{-1}B(s)ds$

Con lo anterior, la **solución general** se escribe como $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$.