



Auxiliar 12: Repaso C3

P1. Calcule las transformadas inversas de las siguientes funciones en el dominio de Laplace:

$$\begin{array}{ll} a) G(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^2 - 7} + \frac{4s}{s^2 + 2} + \frac{e^{-2s}}{s} & c) G(s) = \ln \left(\frac{s-3}{s+1} \right) \\ b) G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s - 1} & d) G(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \end{array}$$

P2. Use transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = \begin{cases} 1 & \text{si } 5 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = y'(0) = 0$.

P3. Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau) d\tau = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

P4. Resuelva el siguiente sistema lineal, especificando su matriz fundamental canónica:

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resumen de contenidos

Definición (Transformada de Laplace). Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Se define la **Transformada de Laplace** de f como

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

para aquellos $s \in \mathbb{R}$ tales que la integral anterior converja. En caso que la integral anterior exista para $s > c$ para c algún número que depende de f , se dirá que c es la **asíntota** de la transformada.

Proposición (Linealidad de $\mathcal{L}[\cdot]$). La Transformada de Laplace es un operador lineal (sobre funciones), es decir, para todo par de funciones f y g integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathcal{L}[f + \lambda g] = \mathcal{L}[f] + \lambda \mathcal{L}[g]$$

Definición (Función de orden exponencial). Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dirá que f es de **orden exponencial** si existen constantes $M \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$. Al menor $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisfaga lo anterior se le denomina **orden exponencial** de f y en tal caso denotamos $\mathcal{C}_\alpha$ al conjunto de todas las funciones de orden exponencial α .

Definición (Convolución de funciones). Sean $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la **convolución** de f y g como la **función**

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

Proposición. El producto de convolución es conmutativo, asociativo y distribuye con respecto a la suma en $\mathcal{C}_\alpha$, es decir, para todas $f, g, h \in \mathcal{C}_\alpha$ se tienen:

1. $f * g = g * f$ (conmutatividad).
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociatividad).
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$ (distributividad sobre la suma en $\mathcal{C}_\alpha$).

Teorema (Lerch). Si f y g son funciones de orden exponencial tales que $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, entonces $f = g$ (salvo, quizás, en la unión de puntos de discontinuidad de f y g).

Definición (Antitransformada de Laplace). Sean $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\rho : (s, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones, donde f es de orden exponencial y s es la asíntota de la transformada de f , tales que $\mathcal{L}[f] = \rho$. Entonces f se llama la **antitransformada** (de Laplace) de la función ρ y lo denotamos $\mathcal{L}^{-1}[\rho] = f$. El operador $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ de antitransformada está bien definido gracias al Teorema de Lerch y es lineal.

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$	$t \operatorname{sen}(wt)$	$\frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$e^{\sigma t} \operatorname{sen}(wt)$	$\frac{w}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$	$e^{\sigma t} \operatorname{cos}(wt)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$t^k e^{\lambda t}$	$\frac{k!}{(s - \lambda)^{k+1}}$	$\operatorname{senh}(wt)$	$\frac{w}{s^2 - w^2}$
$\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$	$\operatorname{cosh}(wt)$	$\frac{s}{s^2 - w^2}$
$\operatorname{cos}(wt)$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\delta_a(t)$	e^{-as}

Cuadro 1: Transformadas de Laplace más importantes.

Proposición (Propiedades de la Transformada de Laplace). Sean $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de orden exponencial e integrables, y $a \in \mathbb{R}$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. **Transformada de Laplace de las derivadas.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+)$$

2. **Transformada de Laplace de una primitiva.**

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u)du\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s} \int_0^a f(u)du$$

3. **Traslación en el dominio temporal.**

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f](s)$$

4. **Traslación en el dominio de frecuencias.**

$$\mathcal{L}[f(t)](s-a) = \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)$$

5. **Derivadas de la Transformada de Laplace.**

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

6. **Integral de la Transformada de Laplace.**

$$\int_0^s \mathcal{L}[f](u)du = -\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$$

7. **Transformada de Laplace de funciones periódicas.** Si f es T -periódica, entonces

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

8. **Transformada de Laplace de una convolución.**

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s)$$

Observaciones:

- La Transformada de Laplace es un operador que actúa **sobre funciones** y entrega **otra función**. Tener muy presente que los objetos $\mathcal{L}[f]$ y $\mathcal{L}[f](s)$ no son lo mismo: el primero es la Transformada de Laplace de f , y el segundo es la Transformada de Laplace de f **evaluada en s** .
- Cada vez que se escribe $\mathcal{L}[f(t)](s)$ en lugar de $\mathcal{L}[f](s)$ se está cometiendo un **abuso de notación**, pues f denota a la función y $f(t)$ es la función evaluada en t . Cometemos este abuso de notación **solamente para reconocer fácilmente la función a la que le estamos calculando su Transformada de Laplace**. Por esto, $\mathcal{L}[f(t)]$ siempre debe entenderse como $\mathcal{L}[f]$, y es esta última notación la más formal o rigurosa.
- Las Transformadas de Laplace más importantes se adjuntan en la Tabla 1 y adquieren tal calificativo por constituir la base para el cálculo de transformadas más difíciles, con ayuda de las propiedades de $\mathcal{L}[\cdot]$.
- La Transformada de Laplace convierte **ecuaciones diferenciales** en **ecuaciones algebraicas**. Nos despojamos del enfoque típico de los capítulos anteriores, es decir, aplicaremos $\mathcal{L}[\cdot]$ en nuestras EDO y despejaremos la transformada de nuestra función incógnita, para concluir calculando la antitransformada de la expresión resultante.
- Dado lo anterior, es muy útil (nuevamente) tener presente el procedimiento de **descomposición en fracciones parciales**.
- Gracias a Pablito Zuñiga por su resumen < 3