

P1

$X' = AX$, Tiene como solución $\boxed{e^{At} \cdot \vec{X}_0 = X}$

con $\vec{X}_0$ el vector de las condiciones iniciales, en caso de que no hayan se dejan N constantes libres

Para calcular e^{At} , hay 2 caminos el primero, cuando es diagonalizable $\Rightarrow A = P D P^{-1}$
 $\Rightarrow e^{At} = P e^{Dt} P^{-1}$
 $\nearrow$ con los valores propios en la diagonal
 $\searrow$ e^{Dt} es más fácil

El segundo usar la definición $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$
 para algunas matrices esto sale bien.

Recordatorio $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$
 $\searrow$ $e^{\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n t} \end{bmatrix}$

También se cumplen las otras propiedades de e^x

a) Opción 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomio Característico

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1]$$

$$= (1-\lambda)\lambda(\lambda-2) \Rightarrow 3 \text{ valores propios } \{0, 1, 2\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1},$$

~~Las la columna de P son los~~
~~Vectores propios de A en la diagonal~~
 Las columnas de P son los $\vec{v}_p$ de λ_i

Vector propio de $\lambda_i=0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z=0$$

$$x+y=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector propio de $\lambda_i=1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z \text{ libre} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vector propio de $\lambda_i=2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} z=0 \\ x-y=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{2t} \\ -1 & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+e^{2t} & e^{2t}-1 & 0 \\ e^{2t}-1 & e^{2t}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2e^t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_1 - c_2 + (c_1 + c_2)e^{2t} \\ -(c_1 - c_2) + (c_1 + c_2)e^{2t} \\ 2c_3 e^t \end{pmatrix} \text{ o equivalente } = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 e^{2t} \\ -K_1 + K_2 e^{2t} \\ K_3 e^t \end{pmatrix}$$

Opção 2

$$A = I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_L \Rightarrow e^{At} = e^{It} \cdot e^{Lt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot e^{Lt}$$

$$L^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L^3 = L$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Lt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Lt)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Lt)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} L \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{2k+1} \cdot t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$L^{2k+1} = L$$

$$L^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ salvo em } k=0 \Rightarrow L^0 = I$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} L^2 \cdot \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} L \cdot \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{t^0}{0!} \cdot I, \quad \boxed{I - L^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} L^2 \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} L \cdot \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando

que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh(t) \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(t)$$

$$\Rightarrow e^{Lt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Lt)^k}{k!} = L^2 \cdot \cosh(t) + L \sinh(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} & 0 \\ \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh(t) &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ \sinh(t) &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{aligned}}$$

Se llama a lo mismo

b) $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -(5+\lambda) & 2 \\ -6 & (2-\lambda) \end{bmatrix} = (5+\lambda)(2-\lambda) + 12$

$$= \lambda^2 + 3\lambda - 10 + 12 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

$\Rightarrow \lambda = \{-2, -1\}$, Kernel de -2 $\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y = 3x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kernel de -1 $\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y = 4x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2t} & -e^{-2t} \\ -3e^{-t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 3e^{-t} & 2(e^{-t} - e^{-2t}) \\ 6(e^{2t} - e^{-t}) & -3e^{-2t} + 4e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$X = e^{At} \cdot \vec{C}$$

P2 Primero escribir como Matriz

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observación

Como es diagonal Triangular

Sus valores propios son todos 1's
son los de la diagonal
diagonalizar

Notemos que $A = I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B$

$\Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{It} \cdot e^{Bt}, \quad e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Bt)^k}{k!} = I + Bt + \frac{B^2 t^2}{2!}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1+5t+2t^2 \\ 1+2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^t(1+5t+2t^2) \\ y(t) = e^t(1+2t) \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

P3

$$\begin{aligned} x' &= (t+1)x + 2y \\ y' &= (t+2)y - x \end{aligned}$$

a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} t-1 & 2 \\ -1 & t+2 \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Obs: $A(t) = P D(t) P^{-1}$

, No Siempre es cierto, pues P podría depender de t

Para este caso particular sí vale

$$\det(A(t) - \lambda) = \det \begin{bmatrix} t-1-\lambda & 2 \\ -1 & t+2-\lambda \end{bmatrix} = (t-1-\lambda)(t+2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - (2t+1)\lambda + (t-1)(t+2)+2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2t+1 \pm \sqrt{(2t+1)^2 - 4(t-1)(t+2)-8}}{2} = \boxed{t} \vee \boxed{t+1}$$

Kernel de t

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y = x \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kernel de t+1

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t+1 \end{bmatrix}}_{D(t)} P^{-1}$$

$$c) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P D(t) P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = D(t) P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ Siempre que } P^{-1} \text{ no depende de } t \text{ sirve este Truquito}$$

$$\left(P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)' = D(t) \left(P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = D(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} u' &= t u & (1) \\ v' &= (t+1)v & (2) \end{aligned}$$

$$d) \begin{aligned} (1) \Rightarrow u(t) &= K_1 e^{\frac{t^2}{2}} \\ (2) \Rightarrow v(t) &= K_2 e^{\frac{(t+1)^2}{2}}, \text{ como } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{\frac{t^2}{2}} \\ K_2 e^{\frac{(t+1)^2}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x(t) = 2K_1 e^{\frac{t^2}{2}} + K_2 e^{\frac{(t+1)^2}{2}}, \quad y(t) = K_1 e^{\frac{t^2}{2}} - K_2 e^{\frac{(t+1)^2}{2}}$$

Con este Truco no se calcula P^{-1}

P4] Vamos a usar una técnica similar a la anterior (P3)
 Para hacer 2 ecuaciones independientes

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right] = \underbrace{D}_{\text{D}} \underbrace{P^{-1}}_{\text{P}^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} t^2 \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 + 2e^{-2t} \\ t^2 - 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1) \quad \dot{u} = -2u + \frac{t^2 + 2e^{-2t}}{2} \quad \text{--- ~~no se puede~~ ---}$$

$$(2) \quad \dot{v} = 4v + \frac{t^2 - 2e^{-2t}}{2}$$

$$(1) \cdot e^{2t} \Rightarrow e^{2t} \dot{u} + e^{2t} 2u = \frac{e^{2t} \cdot t^2 + 2}{2}$$

$$(e^{2t} \cdot u)' = \frac{e^{2t} t^2 + 2}{2} \quad \int dt$$

$$e^{2t} u = C_1 + t + \frac{e^{2t}}{8} - \frac{e^{2t} \cdot t}{4} + \frac{e^{2t} t^2}{4}$$

$$\Rightarrow U(t) = C_1 e^{-2t} + t e^{-2t} + \frac{1-t+2t^2}{8}$$

Similar

$$V(t) = C_2 e^{4t} + \frac{e^{-2t}}{6} - \frac{1+4t+8t^2}{64}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} + \left(\frac{1}{6} + t\right) e^{-2t} + \frac{(8-7-20t+8t^2)}{64} \\ C_2 e^{4t} - C_1 e^{-2t} + \left(\frac{1}{6} - t\right) e^{-2t} - \frac{(9-12t+24t^2)}{64} \end{bmatrix}$$

obs: C_1, C_2 se pueden determinar Agregando condiciones iniciales
