MA2601-8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Petra Zamorano y Vicente Salinas
Fecha: 26 de Mayo de 2022

Auxiliar 9: Matrices Exponenciales y resolver sistemas

P1. Encuentre la solución general de $X' = AX$ para las siguientes matrices A, desacoplando las componentes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

P2. Encontrar solución mediante la exponencial de:

$$x' = x + 2y + 3z$$
$$y' = y + 2z$$
$$z' = z$$

Con las condiciones $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

P3. Considere el sistema lineal de primer orden siguiente

$$x' = (t-1)x + 2y$$
$$y' = (t+2)y - x$$

a) Escriba el sistema como $z' = A(t)z$, donde $z = (x, y)$ y $A(t) \in M_{2\times 2}(R)$.

b) Para $t \in R$ fijo obtenga los valores y vectores propios de $A(t)$. Deduzca que $A(t)$ puede ser descompuesta como $PD(t)P^{-1}$, indicando explícitamente las matrices P invertible y $D(t)$ diagonal.

c) Considere el cambio de variables $z = Pw$, donde $w = (u, v)$. Muestre que usando dicho cambio, el sistema se reduce a 2 EDO lineales de primer orden independientes.

d) Resuelva las ecuaciones de la parte anterior y obtenga las soluciones para $x(t)$ e $y(t)$.

P4. Considere el siguiente sistema lineal y encuentre la solución general:

$$x' = x + 3y + t^2$$
$$y' = 3x + y - 2e^{-2t}$$

Hint: Quizás le sirva usar un cambio de variable para hacer más corto el problema.

Resumen

Sea $M \in M_{n\times n}(R)$ una matriz cuadrada. Se define la exponencial de M como:

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \dots$$

Sean $A, B \in M_{n\times n}(R)$ y $s, t \in R$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $e^{0_{n\times n}\cdot t} = e^{A\cdot 0} = I$ ($0_{n\times n}$ es la matriz cuadrada con entradas nulas).
2. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$ (donde $' := \frac{d}{dt}$).
3. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$. En particular, e^{At} es invertible con $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.
4. $AB = BA \iff Be^{At} = e^{At}B$ para todo $t \in R$.
5. $AB = BA \iff e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ para todo $t \in R$.