

P11) Soluciones Constantes $\Rightarrow \dot{y} \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{t}{1+t^2} \operatorname{ArTan}(y(t)) \cos(y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 = \operatorname{ArTan}(y(t)) \cos(y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2 opciones 1) $\operatorname{ArTan}(y(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$2) \cos(y(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ y(t) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

b) Notamos que $f(t, y)$ para t o continua en todo $\mathbb{R}$, por $t^2+1 > 0$

Para ver Lipschitz vamos a estudiar la resta.

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= \left| \frac{t}{1+t^2} (\operatorname{ArTan}(y_1) \cos(y_1) - \operatorname{ArTan}(y_2) \cos(y_2)) \right| \underbrace{\left| \frac{t}{1+t^2} \right| \leq 1}_{(*)} \\ &\leq \left| \underbrace{\operatorname{ArTan}(y_1) \cos(y_1)}_{g(y_1)} - \underbrace{\operatorname{ArTan}(y_2) \cos(y_2)}_{g(y_2)} \right| \end{aligned}$$

$$g(y_1) - g(y_2) = g'(\xi) (y_1 - y_2) \quad \text{Per TVM (1)}$$

$$g'(y) = (A \tan(y))' \cos(y) + A \tan(y) (\cos(y))'$$

$$= \frac{\cos(y)}{1+y^2} + (-\sin(y) A \tan(y))$$

$$|g'(y)| = \left| \frac{\cos(y)}{1+y^2} + (-\sin(y) A \tan(y)) \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{\cos(y)}{1+y^2} \right|}_{\leq 1} + \underbrace{\left| \sin(y) A \tan(y) \right|}_{\leq \frac{\pi}{2}} \leq 1 + \frac{\pi}{2} \leq 10$$

$$\Rightarrow |g'(y)| \leq 10$$

Usando (1)

$$\Rightarrow |g(y_1) - g(y_2)| = |g'(y)| \cdot |y_1 - y_2|$$

$$\leq 10 \cdot |y_1 - y_2|$$

$$\Rightarrow |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq 10 \cdot |y_1 - y_2| \Rightarrow \text{Es Lipschitz en } y$$

$\Rightarrow$ Cumple el TEU

9) El Teu nos dice que si tenemos 2 soluciones

$$\text{de } \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = y_2$$

(En palabras simples, si
comparamos 4 puntos son iguales
en todos)

9) Sea y solución de la ecuación con $y(0) = y_0$

Casos — Si $y_0 = 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0$ es Acotada.

— Si $y_0 = \frac{\pi}{2} + K\pi \Rightarrow y(t) \equiv \frac{\pi}{2} + K\pi$ es Acotada.

— Si $y_0 \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$
 $y_0 \neq 0 \Rightarrow y(t)$ No constante

No tenemos que $\exists \tilde{K} \in \mathbb{Z} \forall t$ que $y_0 < \frac{\pi}{2} + \tilde{K}\pi$
o $y_0 > \frac{\pi}{2} + (\tilde{K}-1)\pi$

Si $y(\bar{t}) \geq \frac{\pi}{2} + \tilde{K}\pi \Rightarrow \exists t \in [0, \bar{t}]$ tal que

$y(t) = \frac{\pi}{2} + \tilde{K}\pi$, por TEU
esto es imposible

$$\Rightarrow y(t) < \frac{\pi}{2} + \tilde{K}\pi$$

De igual manera $y(t) \geq \frac{\pi}{2} + (\tilde{K}-1)\pi$

$\Rightarrow y(t)$ es Acotada

d) Sea $u(t) = y(-t) \Rightarrow u(0) = y(0) = y_0$

$$u'(t) = (y(-t))' = y'(-t) \cdot (-1)$$

$$= \frac{(-t)}{1+(-t)^2} \operatorname{ArTan}(y(-t)) \cdot \cos(y(-t)) \cdot (-1)$$

$$= \frac{t}{1+t^2} \operatorname{ArTan}(y(t)) \cdot \cos(y(-t))$$

$$= \frac{t}{1+t^2} \operatorname{ArTan}(u(t)) \cos(u(t))$$

$\Rightarrow u(t)$ e $y(t)$ cumplen el mismo PVI

por TEU $\Rightarrow u(t) = y(t) \Leftrightarrow y(-t) = y(t)$

P2 a) $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow y_H^{(x)} = A \cos(x) + B \sin(x)$

$$y_H(0) = A = a \Rightarrow y_H(x) = a \cos(x) + B \sin(x)$$

$$y_H'(0) = B = b \Rightarrow \boxed{y_H(x) = a \cos(x) + b \sin(x)}$$

b) En particular con $\begin{cases} a = \sin(\pi) \\ b = \cos(\pi) \end{cases} \Rightarrow \boxed{y(x) = \sin(\pi) \cos(x) + \cos(\pi) \sin(x)}$

es la única solución del problema, pues las edos
A coef constantes siempre cumplen TEU

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \sin(x+n) \\ g'(x) &= \cos(x+n) \\ g''(x) &= -\sin(x+n) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} g''(x) + g(x) &= 0 \\ g(0) &= \sin(n) \\ g'(0) &= \cos(n) \end{aligned}$$

Por TEU $\Rightarrow g(x) = z(x)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin(x+n) = \sin(n) \cos(x) + \cos(n) \sin(x)}$$

P3 $y'' - 3 \frac{y'}{x} + \frac{4y}{x^2} = 0$ / Probanda x^α

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 3\alpha x^{\alpha-2} + 4x^{\alpha-2} = 0 \quad / \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

$$\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 4 = 0$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$$

$$(\alpha-2)^2 = 0 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow x^2 \text{ es solución por inspección}$$

Usamos Liouville

$$y_2(x) = Cx^2 \int \frac{e^{-\int \frac{-3}{2x} dx}}{x^2} dx = Cx^2 \int \frac{e^{\ln(x^3)}}{x^2} dx = Cx^2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\boxed{y_2(x) = Cx^2 \ln(x)}$$

P4 Otro nombre para usar /ouville

Primera por miligramos

Está en el enunciado

$$y' - \frac{(x+1)}{x} y' + \left(1\right) \frac{y}{x} = 0$$

$$y_2 = C e^x \int \frac{e^{-\int \frac{x+1}{u} du}}{e^{2x}} dx \quad / \quad \int \frac{u+1}{u} du = \int 1 + \frac{1}{u} du = u + \ln(u)$$

$$= C e^x \int \frac{e^{x+\ln(x)}}{e^{2x}} dx = C e^x \int e^{-x} \cdot x dx$$

$$= C e^x \left[-1 \right] \left[e^{-x} x + e^{-x} \right]$$

$$y_2(x) = \tilde{C} [x + 1]$$

PS $y'' + 4y = e^x$ } $y'' + 4y = 0 \Rightarrow y_H = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
 $\lambda^2 = -4$

Se puede usar Variación de parámetros y que son integrales de la

form $\int e^x \cos(2x) dx$ y $\int e^x \sin(2x)$

Para también se puede notar que proponer una solución de la forma $y_p(x) = D e^x$ es buena idea

$$De^x + 4De^x = e^x \Rightarrow D + 4D - 1 = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{e^x}{5}} \Rightarrow y(x) = y_H + y_p$$

$$b) y'' + 4y = \cos(x)$$

Particular $y_p(x) = C \cos(x)$

$$-C \cos(x) + 4C \cos(x) = \cos(x) \Rightarrow 3C = 1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{y_p = \frac{\cos(x)}{3}}$$

c) En pos. $y(x) = e^x, x \leq \pi, y(x) = \cos(x) x > \pi$

$$y(x) = \begin{cases} A \cos(2x) + B \sin(2x) + \frac{e^x}{5} & \text{si } x \leq \pi \\ C \cos(2x) + D \sin(2x) + \frac{\cos(x)}{3} & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Usando que $y(0) = 1 \Rightarrow A + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow A = \frac{4}{5}$

$y'(0) = 1 \Rightarrow 2B + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow B = \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} \frac{4}{5} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x) + \frac{e^x}{5} & \text{si } x \leq \pi \\ C \cos(2x) + D \sin(2x) + \frac{\cos(x)}{3} & x > \pi \end{cases}$$

Como $y(x)$ es 2 veces derivable $\Rightarrow \left. \begin{matrix} y(x) \\ y'(x) \end{matrix} \right\} \text{son Continuas}$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} y(\pi^-) = \frac{4}{5} + \frac{e^\pi}{5} \\ y(\pi^+) = C - \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \Rightarrow C = \frac{5 + 12 + 3e^\pi}{15} = \boxed{\frac{17 + 3e^\pi}{15}}$$

$$\left. \begin{matrix} y'(\pi^+) = 2D \\ y'(\pi^-) = \frac{4}{5} + \frac{e^\pi}{5} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{D = \frac{4 + e^\pi}{10}}$$

$$\Rightarrow \left| y(x) = \begin{cases} \frac{4}{5} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x) + \frac{e^x}{5} & \text{si } x \leq \pi \\ \frac{17 + 3e^\pi}{15} \cos(2x) + \frac{4 + e^\pi}{10} \sin(2x) + \frac{\cos(x)}{3} & \text{si } x > \pi \end{cases} \right|$$