MA2601-8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Petra Zamorano y Vicente Salinas
Fecha: 4 de mayo de 2022

Auxiliar 7: Pre Control 2

P1. Considere la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{t}{1+t^2} arctan(y) cos(y)$$

a) Encuentre las soluciones constantes de la ecuación.

b) Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(t, y) = \frac{t}{1+t^2} arctan(y) cos(y)$$

satisface la condición de ser Lipchitz para y.

c) Demuestre que si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación, entonces y es acotada

d) Demuestre que si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución entonces es una función par.

P2. Considere la siguiente EDO lineal a coeficientes constantes

$$z'' + z = 0, \text{ en } [-2\pi, 2\pi], z(0) = a, z'(0) = b$$

a) Calcule la solución de la EDO.

b) Sea $y \in \mathbb{R}$. Considerando $a = sin(y)$ y $b = cos(y)$, utilice la parte anterior para demostrar que para todo $x \in [-2\pi, 2\pi]$ y todo $y \in \mathbb{R}$ se satisface: $sin(x + y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y)$.
Indicación: Considere g(x) = sin(x + y) ¿Qué EDO satisface g? Concluya usando el Teorema de existencia y unicidad.

P3. Considere

$$y'' - 3\frac{y'}{x} + \frac{4y}{x^2} = 0$$

encuentre por inspección una solución de la EDO y luego utilizando la fórmula de Liouville encuentre la otra solución l.i.

P4. Verifique que la función $y_1(x) = e^x$ es una solución de la ecuación

$$xy'' - (x + 1)y' + 10y = 0$$

Use el metodo de reducción de orden para determinar una segunda solución $y_2(x)$.

P5. *a*) Encuentre la solución general de la ecuación $y'' + 4y = e^x$.

b) Encuentre la solución general de la ecuación $y'' + 4y = cosx$

c) Resuelva el problema de valor inicial $y'' + 4y = g(x), y(0) = 1, y'(0) = 1$ donde $g(x) = e^x, x \leq$ y $g(x) = cosx, x >$.
Sugerencia: Resuelva el problema en dos intervalos y encuentre una solución tal que y, y' sean continuas en $x = \pi$.

Resumen

Solución particular: Variación de Parámetros: Sea la ecuación de orden n:

$$\begin{cases} z'(x) = & A_c z(x) + b(x) \quad \text{para } x \in I \\ z_k(x_0) = & y^{(k-1)}(x_0) \quad \text{para } k \in \{1, .., n\} \end{cases}$$

Supongamos que tenemos una base $y_1, ..., y_n$ de soluciones de la ecuación homogénea. Recordemos que:

$$\Phi = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Solución de la forma:

$$y_p(x) = F_1(x)y_1(x) + \ldots + F_n(x)y_n(x)$$

Para esto recuerde que: $F(x) = \int \Phi^{-1}(x)b(x)dx$ y $b(x) = (0, \ldots, \overline{Q})$

Polinomio Característico caso n=2: Sea $Ay'' + By' + C = 0$, las soluciones de esta ecuación vienen dadas por las soluciones del polinomio: $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, con esto:

$$y(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}$$

Con K_1, K_2 dados por las condiciones iniciales o de borde. **Obs:** En caso de que λ es único, las soluciones son:

$$y(x) = K_1 e^{\lambda x} + K_2 x e^{\lambda x}$$

Definición: Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz de constante $L > 0$ si:

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Teorema (de Existencia y Unicidad Global o Picard-Lindelöf). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times R \to R$ una función continua en su primera variable y globalmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy.

$$(PC)\begin{cases} y' & = f(\text{t,y}) \\ \text{y(x}_0) & = \text{y}_0 \end{cases}$$

Obs: Existe la versión local, al probarlo para una vecindad de (x_0, y_0)

Teorema (del Valor Medio). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Obs: Se puede usar para probar Lipschitz, en caso de poder acotar la derivada.

Teorema (Fórmula de Abel). Considere la ecuación $y^(n) + a_{n-1}(x)y(n-1) +$ ůůů $+ a_1(x)y' \overline{+ a_0(x)y =} 0$ e $y_1, \ldots, y_n \in H$ con W su Wronskiano asociado. Entonces, se satisface la Fórmula de Abel: $W(x) = Cexp(-\int \overline{a_{n-1}(x)dx})$, con $C \in \mathbb{R}$

Teorema (Fórmula de Liouville). Considere la EDO $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ e y_1 una solución. Entonces, la otra solución viene dada por la fórmula de Liouville: $y_2(x) = Cy_1(x) \int \dfrac{exp(-\int \overline{a}(u)du)}{y_1(x)^2}dx$, con $C \in \mathbb{R}$ (arbitraria).