

P1

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Buscar solución Homogénea $\Rightarrow y'' - y = 0$

Polinomio Característico $\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$

$$\Rightarrow y_H = K_1 e^x + K_2 e^{-x}$$

Para buscar una y_p usaremos Variación de parámetros con

$$y_1 = e^x \quad y \quad y_2 = e^{-x}$$

$\Rightarrow$

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad \det(\Phi) = -2 \Rightarrow \text{son li}$$

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix}$$

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^{-x}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-x}} \end{pmatrix}}_b$$

$$F(x) = \int \Phi'(x) b(x) dx = \int \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ \frac{-e^x}{1+e^{-x}} \end{pmatrix} dx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ \int \frac{-e^x}{1+e^{-x}} dx \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(- \int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx - \int \frac{du}{1+u} \right) = \frac{1}{2} \left(- \ln(1+e^{-x}) - \int \frac{u}{u+1} du \right) = \frac{1}{2} \left(- \ln(1+e^{-x}) - \left[\int du - \int \frac{1}{u+1} du \right] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(- \ln(1+e^{-x}) - [u - \ln(u+1)] \right) = -\frac{1}{2} \left(\ln(1+e^{-x}) - e^x + \ln(e^x+1) \right)$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{2} \left[e^x \ln(1+e^{-x}) + (1-e^{-x}) \ln(e^x+1) \right]$$

$$\Rightarrow y = y_H + y_p$$

P2 a) Como $z_1(x)$ por $x \in (a, b)$ es positivo $\Rightarrow z_1(a) = z_1(b) = 0$

$$\Rightarrow \text{aplicar 1} \quad z_1(a) < 0 \Rightarrow z_1'(a) \geq 0 \quad \text{por es creciente}$$

$$\text{aplicar 2} \quad z_1(a) = 0 \Rightarrow z_1'(a) = 0 \quad \text{por es constante}$$

$$\text{aplicar 3} \quad z_1(a) > 0 \Rightarrow z_1'(a) = 0 \quad \text{por es un m\u00e1ximo local}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1'(a) \geq 0}$$

$$\text{y An\u00e1logo} \quad \boxed{z_1'(b) \leq 0}$$

$$b) W(x) = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{pmatrix} = z_1 z_2' - z_1' z_2$$

$$W(a) = \overbrace{z_1(a)}^0 \overbrace{z_2'(a)}^0 - \underbrace{z_1'(a)}_{\neq 0} \underbrace{z_2(a)}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{W(a) \leq 0}$$

$$W(b) = \underbrace{z_1(b)}_{\neq 0} \underbrace{z_2'(b)}_{\neq 0} - \underbrace{z_2(b)}_{\neq 0} \underbrace{z_1'(b)}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{W(b) \geq 0}$$

$$\begin{aligned} c) \quad W(x)' &= (z_1 z_2')' - (z_2 z_1')' \\ &= \cancel{z_1'} z_2' + z_1 z_2'' - \cancel{z_2'} z_1' - z_2 z_1'' \\ &= z_1 z_2'' - z_2 z_1'' \end{aligned}$$

Usando $z_2'' + p_2(x) z_2 = 0 \Rightarrow z_2'' = -p_2 z_2$
 $z_1'' + p_1(x) z_1 = 0 \Rightarrow z_1'' = -p_1 z_1$

$$\Rightarrow W(x)' = z_1 z_2 (p_1 - p_2) < 0 \Rightarrow \text{Estimante decreciente}$$

d) Si z_2 fuese positiva por d) $\Rightarrow W(a) \leq 0 \leq W(b)$
 pero por c) $\Rightarrow W(x)$ decreciente $\Rightarrow$ ~~*~~

e) Si z_2 fuese negativa en $(a, b) \Rightarrow z_4 = -z_2$ cumple que
 $z_4'' + p_2 z_4 = (-z_2)'' + p_2 (-z_2) = 0$, como z_2 es positivo en (a, b)
~~*~~ por d) $\Rightarrow z_2$ no puede ser negativa en (a, b)

Como no puede ser positiva o negativa en (a, b)
 en algun punto de (a, b) por continuidad, debe anularse

f) Si z_1 fuese negativa $\Rightarrow z_3 = -z_1$ y similar a e)

g) Si Tomamos 2 ceros consecutivos de $z_1 \Rightarrow z_1$ es
 Siempre positiva o Si. siempre negativa y como ya vimos $\Rightarrow$
 z_2 Tiene un cero entre medio.

P3

a)

$$x^2(x^2)'' - 3x(x^2)' + 4(x^2) = 2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} x^2(x^2/v(x))'' - 3x(x^2/v(x))' + 4(x^2/v(x)) &= x^2(2/v(x) + 3) - 3x(2x/v(x) + x) + 4(x^2/v(x)) \\ &= \cancel{2x^2/v(x)} + 3x^2 - \cancel{6x^2/v(x)} - 3x^2 + \cancel{4x^2/v(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Señalamos soluciones de la homogénea
Variación de Parámetro

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} x^2 & x^2/v(x) \\ 2x & 2x/v(x) + x \end{bmatrix} = \cancel{2x^3/v(x)} + x^3 - \cancel{2x^3/v(x)} = x^3 \neq 0 \quad \text{OK}$$

$$\Rightarrow \underline{Q}^{-1}(x) = \frac{1}{x^2} \begin{bmatrix} 2/v(x) + 1 & -x/v(x) \\ -2 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{x^2} & \frac{3}{x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/v(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{Q}^{-1}(x) b(x) = \frac{1/v(x)}{x^2} \begin{bmatrix} -x/v(x) \\ x \end{bmatrix} = \frac{1/v(x)}{x} \begin{bmatrix} -1/v(x) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int \underline{Q}^{-1}(x) b(x) dx = \begin{pmatrix} \int -\frac{1/v(x)^2}{x} \frac{dx}{x} \\ \int \frac{1/v(x)}{x} \frac{dx}{x} \end{pmatrix} \stackrel{(u=x/v(x))}{=} \begin{pmatrix} \int -u^2 du \\ \int u du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u^3}{3} \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1/v(x)^3}{3} \\ \frac{1/v(x)^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim y_p = -\frac{x^2/v(x)^3}{3} + \frac{x^2/v(x)^3}{2} = \boxed{\frac{x^2/v(x)^3}{6}}$$

P4

$$x = e^u \quad w(u) = y(e^u) \quad \left\{ \begin{aligned} w'(u) &= \frac{dy}{du}(e^u) = y'(e^u) \cdot e^u = y'(\cancel{x}) \cdot x \end{aligned} \right.$$

$$w''(u) = \frac{d}{du} (y'(x) \cdot x)$$

$$= \frac{d}{du} (y'(e^u) \cdot e^u) = \frac{d}{du} (y'(e^u)) \cdot e^u + y'(e^u) \cdot e^u$$

$$= y'(e^u) \cdot (e^u)^2 + y'(e^u) \cdot e^u$$

$$w''(u) = y' x^2 + y' x$$

$$x^2 y'' + 2x y' = w''(u) + w'(u)$$

$$\Rightarrow w''(u) + w'(u) + \frac{w(u)}{4} = 0$$

Polynomial Characteristic

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = \boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}}$$

$$(\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow w(u) = A e^{-\frac{u}{2}} + B u e^{-\frac{u}{2}}$$

$$y(\cancel{x}) = A (e^u)^{-\frac{1}{2}} + B \ln(e^u) \cdot [e^u]^{-\frac{1}{2}}$$

$$y(x) = A x^{-\frac{1}{2}} + B \ln(x) x^{-\frac{1}{2}}$$

Problema 1

a) Polinomio

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 7) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = A e^{3x} + B e^{7x}$$

b) Polinomio

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16 \cdot 5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-1 \pm 2i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \pm i}$$

$$\Rightarrow y(x) = A e^{-\frac{x}{2}} \cos(x) + B e^{-\frac{x}{2}} \sin(x)$$

c) $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 \Rightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow y(x) = A e^{-2x} + B x e^{-2x}$$

$$1 = y(0) = A + B \cdot 0 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$y(x) = e^{-2x} + B x e^{-2x}$$

$$y'(x) = -2 e^{-2x} + 2 B x e^{-2x} + B e^{-2x}$$

$$3 = y'(0) = -2 + B \Rightarrow \boxed{B = 5}$$

$$\boxed{y(x) = e^{-2x} + 5x e^{-2x}}$$

Problema 2

Metodo di cambio di $P4$

$$w''(u) - 3w'(u) + w(u) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow w(u) = A e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}u} + B e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}u}$$

$$y(e^u) = A (e^u)^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + B (e^u)^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\Rightarrow y(x) = A x^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + B x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$