MA2601-8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Petra Zamorano y Vicente Salinas
Fecha: 20 de abril de 2022

Auxiliar 5

P1. Encontrar una solución particular de la ecuación

$$y''(x) - y(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

y con esta encontrar todas las soluciones de la ecuación.

P2. Considere las ecuaciones diferenciales en todo $\mathbb{R}$.

$$y'' + p_1(x)y = 0 \qquad (1)$$

$$y'' + p_2(x)y = 0 \qquad (2)$$

donde p_1 y p_2 son funciones continuas en $\mathbb{R}$ que satisfacen $0 < p_1(x) < p_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. El problema consiste en demostrar el **Teorema de comparación Sturm-Picone**:
Entre dos ceros sucesivos de una solución de (1) cualquier solución de (2) debe anularse.
Para ello, se proponen los siguientes pasos:

a) Suponga que z_1 es una solución de (1), que es positiva en el intervalo (a, b) y que satisface $z_1(a) = 0$ y $z_1(b) = 0$, ¿Qué se puede decir de $z_1'(a)$ y $z_1'(b)$?

b) Suponga que z_2 es una solución de (2) y que es positiva en el intervalo (a, b). Si consideramos $W(x) = W(z_1, z_2)(x)$ el Wronskiano de las funciones z_1 y z_2, demuestre que $W(a) \leq 0$ y $W(b) \geq 0$.

c) Demuestre que $W(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).

d) De *b*) y *c*) concluya que z_2 no puede ser positiva en (a, b)

e) ¿Podrá ser z_2 negativa en (a, b)? Concluya que z_2 se anula en algún punto de (a, b).

f) Si z_1 fuese negativa en (a, b), ¿Qué podemos decir?

g) Concluya la demostración.

P3. Considere la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln(x), x > 0$$

a) Verifique que $\{x^2, x^2 \ln(x)\}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

b) Encuentre la solución particular de la ecuación no homogénea.

P4. Resuelva la ecuación $x^2y'' + 2xy' + \dfrac{y}{4} = 0$, usando $x = e^u$ e $w(u) = y(e^u)$

Propuestos

Prop1 Resuelva las siguientes EDOs de orden 2 usando polinomio característico y exprese la base de soluciones. Determine las constantes cuando sea posible.

a) $y'' - 10y' + 21y = 0$

b) $4y'' + 4y' + 5y = 0$

c) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Prop2 Resuelva la ecuación $x^2y'' - 2xy' + y = 0$

Resumen

Solución particular: Variación de Parámetros: Sea la ecuación de orden n:

$$\begin{cases} z'(x) = & A_c z(x) + b(x) & \text{para } x \in I \\ z_k(x_0) = & y^{(k-1)}(x_0) & \text{para } k \in \{1,..,n\} \end{cases}$$

Supongamos que tenemos una base $y_1, ..., y_n$ de soluciones de la ecuación homogénea. Recordemos que:

$$\Phi = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Solución de la forma:

$$y_p(x) = F_1(x)y_1(x) + \ldots + F_n(x)y_n(x)$$

Para esto recuerde que: $F(x) = \int \Phi^{-1}(x)b(x)dx$ y $b(x) = (0, \ldots, \overline{Q})$

Polinomio Característico caso n=2: Sea $Ay'' + By' + C = 0$, las soluciones de esta ecuación vienen dadas por las soluciones del polinomio: $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, con esto:

$$y(x) = K_1e^{\lambda_1 x} + K_2e^{\lambda_2 x}$$

Con K_1, K_2 dados por las condiciones iniciales o de borde. **Obs:** En caso de que λ es único, las soluciones son:

$$y(x) = K_1e^{\lambda x} + K_2xe^{\lambda x}$$