

MA2601-8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**Profesor:** Alexis Fuentes**Auxiliares:** Petra Zamorano y Vicente Salinas**Fecha:** 29 de marzo de 2022**Auxiliar 3****P1.** Casos reducibles:

a) Resuelva la ecuación $y' = xy'' - 1$

b) Encuentre una solución implícita para: $\frac{y''}{y'} = y + 1$

P2. Un cuerpo de masa m se suelta desde el reposo. Sabemos desde la teoría, que el aire ejerce una fuerza de roce proporcional a la velocidad de caída del cuerpo.a) Encuentre el problema de valor inicial que modela la situación. **Indicación:** Recuerde que la fuerza neta es el producto de la masa por la aceleración.b) Determine la velocidad terminal. Es decir el límite de la función velocidad, cuando t tiende a ∞ .c) Calcule la distancia recorrida por el cuerpo en el instante $t = 1$ **P3.** Considere el problema de Cauchy

$$(*) \begin{cases} y' &= \frac{\cos(y)}{1+y^4} \\ y(0) &= \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Demuestre que existe una constante positiva K tal que

$$\left| \frac{\cos(r)}{1+r^4} - \frac{\cos(s)}{1+s^4} \right| \leq K|r-s| \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$$

b) Encuentre una solución definida en todo $\mathbb{R}$ del problema de Cauchy y use la parte anterior para demostrar que esa es la única solución al problema (*).**P4.** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales :

a) $y' + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$

b) $xy^2y' - y^3 = xy^8$

Indicación: Busque una solución es $y_1(x) = Cx$ **P5.** . Encuentre una función $y(x)$, continua para todo $\mathbb{R}$ que cumpla con la siguiente ecuación:

$$y' = xyH(x), \forall x \neq 0$$

Donde $H(x)$ es la función que se conoce como Escalón de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Propuestas

Prop1 Una población $N(t)$ tiene un crecimiento dado por:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(\beta - N)$$

donde α, β son constantes conocidas y estrictamente positivas. Explique que pasa con la población cuando se empieza con distintas condiciones iniciales positivas. ¿Qué representan α y β

Prop2 . Considere la siguiente ecuación diferencial de primer orden en forma diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + t^4}{tx}$$

- Sin calcular la solución analíticamente, demuestre que hay una única solución tal que $x(1) = -1$.
- Muestre que esta ecuación es de Bernoulli y resuélvala. Encuentre la solución particular tal que $x(1) = -1$.
- ¿Cuál es el intervalo de existencia de la solución que pasa por $(2, 1)$ como solución de la ecuación?
- Halle dos soluciones que pasen por el punto $(0, 0)$ ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

Resumen de contenidos

Ecuaciones sin termino independiente: $F(y'', y', x) = 0$, hacer el cambio $z(x) = y'(x)$ y $z'(x) = y''(x)$

Ecuaciones sin termino dependiente: $F(y'', y', y) = 0$, hacer el cambio $z(x) = y'(x)$ y $\frac{dz}{dy}(x)z(x) = y''(x)$

Definición: Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz de constante $L > 0$ si:

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Teorema (de Existencia y Unicidad Global o Picard-Lindelöf). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su primera variable y globalmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy.

$$(PC) \begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Obs: Existe la versión local, al probarlo para una vecindad de (x_0, y_0)

Teorema (del Valor Medio). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Obs: Se puede usar para probar Lipschitz, en caso de poder acotar la derivada.

P1 $y' = xy'' - 1$, usando $y' = z$
 $y'' = z'$

$$\Rightarrow z = xy' - 1$$

$$\Rightarrow z - xz' = -1 \quad / \cdot (-\frac{1}{x})$$

$$z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{x} \quad / \quad e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{x} - \frac{1}{x^2}z = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} \quad / \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\Rightarrow z = -1 + Cx$$

$$\Rightarrow y' = -1 + Cx \quad / \int dx$$

$$\Rightarrow y = -x + \tilde{C}x^2 + D$$

$$b) \frac{y''}{y'} = y + 1$$

$$\begin{aligned} y' &= z \\ y'' &= z' = \frac{dz}{dy} \cdot y' \\ &= \frac{dz}{dy} \cdot z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = y + 1$$

$$/ \int dy$$

$$\Rightarrow z = \frac{(y+1)^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(y+1)^2}{2} + C$$

Por simplicidad tomamos $C < 0$, es difícil si no, pues solo sale con V.S y es del estilo Airy

$$y_1 = \sqrt{-2C} - 1 \Rightarrow y'_1 = 0$$

es solución (usar Riccati)

$$\Rightarrow y = \sqrt{-2C} - 1 + \frac{1}{z}$$

$$y' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$$

Recomp. 70.50

$$\Rightarrow -\frac{1}{z^2} z' = \frac{\left(\sqrt{-2c} + \frac{1}{z}\right)^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = -\cancel{C} + \frac{\sqrt{-2c}}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cancel{C}$$

$$\Rightarrow z' = -z\sqrt{-2c} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z' + z\sqrt{-2c} = -\frac{1}{2} \quad / \quad e^{\int \sqrt{-2c}} = e^{\sqrt{-2c}x}$$

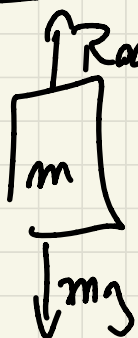
$$\Rightarrow \left(e^{\sqrt{-2c}x} z \right)' = -\frac{1}{2} e^{\sqrt{-2c}x}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\sqrt{-2c}x} z \right) = -\frac{e^{\sqrt{-2c}x}}{2\sqrt{-2c}} + K$$

$$\Rightarrow z = \frac{-1 + \tilde{K} e^{-\sqrt{-2C} x}}{2\sqrt{-2C}}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2C} - 1 + \frac{2\sqrt{-2C}}{-1 + \tilde{K} e^{\sqrt{2C} x}}$$

P2 a) YA entendí porque Falló



El rose lo frenó por lo
que apuntaba contrario a la
velocidad (Contrario a donde
se mueve)

$$\Rightarrow m \ddot{y} = -mg - \underbrace{B \dot{y}}_{-\dot{y}} \uparrow$$

$$\Rightarrow b) \quad \ddot{y} + \frac{\beta}{m} \dot{y} = -g \quad / \quad e^{\frac{\beta}{m}t}$$

$$\Rightarrow \text{USando } \dot{y} = z \quad y \quad \ddot{y} = \dot{z}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z} + \frac{\beta}{m} z = -g$$

$$e^{\frac{\beta}{m}t} \dot{z} + e^{\frac{\beta}{m}t} \cdot \frac{\beta}{m} z = -g e^{\frac{\beta}{m}t}$$

$$(e^{\frac{\beta}{m}t} \cdot z)' = -g e^{\frac{\beta}{m}t} \quad / \quad \int dt$$

$$e^{\frac{\beta}{m}t} z = \frac{-mg}{\beta} \cdot e^{\frac{\beta}{m}t} + C$$

$$z(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$$\Rightarrow e^0 \cdot 0 = \frac{-mg}{\beta} \cdot e^0 + C$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{mg}{\beta} + C \Rightarrow C = \frac{mg}{\beta}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{\beta}{m}t} z = \frac{mg}{\beta} (1 - e^{\frac{\beta}{m}t})$$

$$\Rightarrow z = -\frac{mg}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

$$\Rightarrow v'(t) = -\frac{mg}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

Haciendo $t \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow v'(\infty) \rightarrow -\frac{mg}{\beta}$$

g) Integriere $\dot{y}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \dot{y}(t) dt = \int_0^1 -\frac{mg}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) dt$$

$$\begin{aligned} y(1) - y(0) &= -\frac{mg}{\beta} \cdot \left(t + \frac{m}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{mg}{\beta} \left(1 + \frac{m}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}} - \frac{m}{\beta} \right) \\ &= -\frac{mg}{\beta} \left(1 + \frac{m}{\beta} (e^{-\frac{\beta}{m}} - 1) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Distance} = |y(1) - y(0)| = \frac{mg}{\beta} \left| 1 + \frac{m}{\beta} (e^{-\frac{\beta}{m}} - 1) \right|$$

P3] Como $f(y) = \frac{\cos(y)}{1+y^4}$ es continua, pues $1+y^4 \neq 0$

a)

$\Rightarrow$ Complz TVM

$$\Rightarrow \frac{\cos(x)}{1+x^4} - \frac{\cos(y)}{1+y^4} = f'(\xi)(x-y)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos(x)}{1+x^4} - \frac{\cos(y)}{1+y^4} \right| = |f'(\xi)| |x-y|$$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)}{1+x^4} - \frac{\cos(x) \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}$$

Notas

que

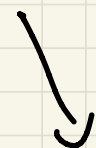
$$\left| \frac{1}{1+x^4} \right| \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+x^4$$
$$\Leftrightarrow \checkmark$$

$$|\cos(x)| \leq 1$$

$$|\sin(x)| \leq 1$$

y $\frac{x^3}{(1+x^4)^2} \rightarrow$ S: $x > 1 \Rightarrow x^3 \leq x^4 \leq x^4 + 1$

$$\Rightarrow x^3 \leq (x^4 + 1)^2$$
$$\rightarrow \frac{x^3}{(1+x^4)^2} \leq 1$$



S: $x \leq 1 \Leftrightarrow x^3 \leq 1$

$$\Rightarrow x^3 \leq 1 + x^4$$
$$\Rightarrow \frac{x^3}{(1+x^4)^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(1+x^4)^2} \leq 1$$

Siempre

$$|f'(x)| = \left| \left(-\sin(x) \cdot \frac{1}{1+x^4} \right) + \left(-\cos(x) \cdot 4 \cdot \frac{x^3}{(1+x^4)^2} \right) \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \sin(x) \cdot \frac{1}{1+x^4} \right|}_{\leq 1} + \underbrace{\left| \cos(x) \cdot 4 \cdot \frac{x^3}{1+x^4} \right|}_{\leq 4}$$

$$\leq 5$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cos(x)}{1+x^4} - \frac{\cos(y)}{1+y^4} \right| \leq 5 |x-y|$$

$\Rightarrow$ Es Lipschitz

$$y' = f(x, y) = \frac{\cos(y)}{1+y^4}$$

$f(x, y)$ es Continuum in x

y es hipotético en z

$\Rightarrow$ Cumple el TEU $\rightarrow$ Siempre
existe al y
es única

b) Notar que $y \equiv \frac{II}{2}$ es solución
del (PVI)

Cumple TEU $\Rightarrow$ Es la única

[PY] a) Reemplazando

$$C + C^2 x^3 - (2x^2 + 1)(Cx + x^3) + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow C - 1 + (1 - C)x + (C^2 - 2C + 1)x^3 = 0$$

$$(C-1) - (C-1)x + (C-1)^2 x^2 = 0$$

$$\Rightarrow C = 1 \quad \text{complic}$$

$$\Rightarrow x_1 = x \quad \text{es solución}$$

$$\Rightarrow y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{1} - \frac{z'}{z} + x \left(x + \frac{1}{z} \right)^2 - (2x^2 + 1) \left(x + \frac{1}{z} \right) + x^3 + x - \cancel{x} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{z'}{z} + \cancel{x^3} + x^2 + \frac{x}{z} - \cancel{2x^3} - \cancel{x} - \frac{1}{z}(2x^2 + 1) + \cancel{x^3} + \cancel{x} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{z'}{z} - \frac{(2x^2+1)}{z} + x^2 + \frac{x}{4} = 0$$

$$\Rightarrow z' - z \left(x^2 + \frac{x}{4} \right) = -(2x^2+1)$$

$$e^{-\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8}\right)} \cdot z' - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8}\right) \cdot z = -e^{-\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8}\right)} (2x^2+1)$$

$$\Rightarrow \left[e^{-\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8}\right)} \cdot z \right]' = -e^{-\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8}\right)} (2x^2+1)$$

$$\Rightarrow z = -e^{\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8}\right)} \cdot \int e^{-\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8}\right)} (2x^2+1) dx + C$$

No se puede despegar mas z

$$\Rightarrow \boxed{y = x + \frac{1}{x}}$$

$$b) \quad x y^2 y' - y^3 = x y^8$$

$$\boxed{y \neq 0}$$

$$\cdot \frac{1}{x y^2}$$

$$\Rightarrow y' - \frac{y}{x} = y^6$$

(Typo Bernoulli)

$$z = y^{1-6} = y^{-5}$$

$$z' = -5 y^{-6} \cdot y'$$

$$\Rightarrow -5 y^{-6} y' + 5 \frac{y^{-5}}{x} = -5$$

$$\Rightarrow z' + 5 \frac{z}{x} = -5$$

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int \frac{5}{x} dx} \\ &= e^{\ln(x^5)} \\ &= x^5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^5 z' + 5x^4 z = -5x^5$$

$$\Rightarrow (x^5 z)' = -5x^5 \quad / \int dx$$

$$x^5 z = -\frac{5}{6}x^6 + C$$

$$z = -\frac{5}{6}x + Cx^{-5}$$

$$z = \frac{-5x^6 + \tilde{C}}{6x^5}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$y = \sqrt[5]{\frac{6x^5}{\tilde{C} - 5x^6}}$$

PS

$$y' = xy H(x)$$

$$\Leftrightarrow y' = \begin{cases} xy & \text{Si } x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Como $y' = 0 \Rightarrow y \equiv K_1$ Si $x < 0$

e $y' = xy \Rightarrow y' - xy = 0$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y' - e^{-\frac{x^2}{2}} xy = 0$$

$$\Rightarrow (e^{-\frac{x^2}{2}} y)' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = K_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Como y es continua

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = K_1 = K_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$$

$$\Rightarrow K_1 = K_2$$

y la solución es

$$y(x) = \begin{cases} K_1 & \text{si } x < 0 \\ K_1 e^{\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Procedo 1

$$N' = \alpha \beta N - \alpha N^2 \quad / \text{Tipo Bernoulli}$$

$$\Rightarrow z = N^{1-2} = N^{-1}$$

$$z' = -N^{-2} \cdot N'$$

$$-N^{-2} N' + \alpha \beta N^{-1} = \kappa$$

$$z' + \alpha \beta z = \alpha \quad / e^{\alpha \beta t}$$

$$\Rightarrow (e^{\alpha \beta t} z)' = \alpha e^{\alpha \beta t}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha \beta t} z = \frac{e^{\alpha \beta t}}{\beta} + K$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{\beta} + K e^{-\alpha \beta t}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1 + \tilde{K} e^{-\alpha \beta t}}{\beta}$$

$$\Rightarrow Z^{-1} = \frac{\beta}{1 + \tilde{K} e^{-\alpha \beta t}}$$

$$\Rightarrow N = \frac{\beta}{1 + \tilde{K} e^{-\alpha \beta t}}$$

Supericula $N(0) = N_0$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{\beta}{1 + \tilde{K}} \Rightarrow 1 + \tilde{K} = \frac{\beta}{N_0} \Rightarrow \tilde{K} = \frac{\beta}{N_0} - 1$$

$$= \frac{\beta - N_0}{N_0}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{\beta}{\frac{N_0}{N_0} + \left(\frac{\beta - N_0}{N_0}\right) e^{-\alpha \beta t}} = \boxed{\frac{\beta N_0}{N_0 + (\beta - N_0) e^{-\alpha \beta t}}}$$

Primero: Valores d modelo $N \equiv 0$ y $N \equiv \beta$ son sol

$N \equiv 0$ nunca hubo nada

$N \equiv \beta$ se Alcanza un estado de equilibrio.

$\Rightarrow \beta =$ Población de equilibrio

$\alpha =$ Tasa de nacimiento.

Si $N_0 < \beta \Rightarrow \beta - N_0 > 0$

$\Rightarrow N_0 + (\beta - N_0) e^{-\alpha \beta t} > 0$

y cuando $t \rightarrow \infty \Rightarrow N_0 + (\beta - N_0) e^{-\alpha \beta t} \rightarrow N_0$

$$\Rightarrow N(t) \rightarrow \frac{\beta N_0}{N_0} = \beta$$

Se estabiliza en $N = \beta$

$$\text{Si: } \beta < N_0 \rightarrow \beta - N_0 < 0$$

$$N_0 + (\beta - N_0) = \beta > 0$$

$$N_0 + (\beta - N_0) < N_0 + (\beta - N_0) e^{-\alpha \beta t}$$

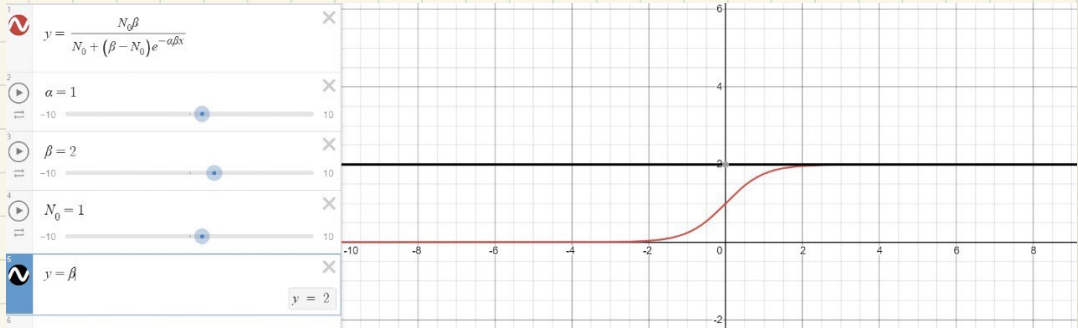
$\begin{matrix} \text{por} \\ 1 > e^{-\alpha \beta t} \end{matrix}$

$$\Rightarrow 0 < N_0 + (\beta - N_0) e^{-\alpha \beta t} \quad \forall t > 0$$

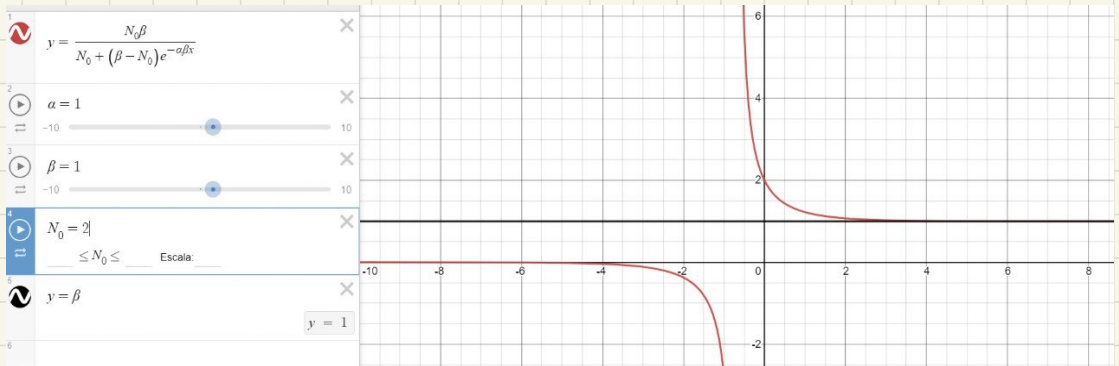
$$t \rightarrow \infty \rightarrow N_0 + (\beta - N_0) e^{-\alpha \beta t} \rightarrow N_0$$

$$\Rightarrow N \rightarrow \frac{\beta N_0}{N_0} = \beta$$

$\Rightarrow$ También converge a β
 $N_0 < \beta$



$N_0 > \beta$



Proposta 2:

$$f(t, x) = \frac{x^2 + t^4}{xt}$$

$f(t, \bar{x})$, es continuo por t quando $\bar{x} \neq 0$

$$f(\bar{t}, x_1) - f(\bar{t}, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{t}, \xi) (x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow |f(\bar{t}, x_1) - f(\bar{t}, x_2)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{t}, \xi) \right| |x_1 - x_2|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{2x^2t - t}{x^2t^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2t}$$

Si $\bar{t}$ corre de 4 y x corre de 1

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| < M, \text{ pois } x^2t \neq 0$$

$$\Rightarrow |f(\bar{t}, x_1) - f(\bar{t}, x_2)| < M |x_1 - x_2|$$

$\Rightarrow$ es Lipschitz local cerca de $(1, -1)$

$\Rightarrow$ Cumple TEV local, o decir

Cerca de $(1, -1)$ la solución es única

$$x' = \frac{x^2 + t^3}{xt} = \frac{x}{t} + \frac{t^3}{x}$$

$$1-N=2$$

$$z = x^2$$

$$z' = 2x x'$$

$$\Rightarrow 2x x' = \frac{2x^2}{t} + 2t^3$$

$$\Rightarrow z' - \frac{2z}{t} = 2t^3 \quad \mu = \frac{1}{t^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{z'}{t^2} - 2 \frac{z}{t^3} = 2t$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{z}{t^2} \right)' = 2t$$

$\Rightarrow$

$$\frac{z}{t^2} = t^2 + C$$

$$\rightarrow z = t^4 + C t^2$$

$$= t^2 (t^2 + C)$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{t^4 + C t^2}$$

c)

El intervalo $(2, 1)$ sirve hasta

$(0, \infty)$ la única limitante es $4t^2 = 0$

d) Al imponer $X(0) = 0$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{t^4} = \pm t^2$$

Tercera 2 soluciones $X(0) = 0$

~~¿TEU?~~ R: No, notar que
en $(0, 0)$ no se
pueden ser lipshitz
 $\Rightarrow$ No se verifica la
hipótesis