MA2601-8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Petra Zamorano y Vicente Salinas
Fecha: 29 de marzo de 2022

Auxiliar 3

P1. Casos reducibles:

a) Resuelva la ecuación $y' = xy'' - 1$

b) Encuentre una solución implícita para: $\dfrac{y''}{y'} = y + 1$

P2. Un cuerpo de masa m se suelta desde el reposo. Sabemos desde la teoría, que el aire ejerce una fuerza de roce proporcional a la velocidad de caída del cuerpo.

a) Encuentre el problema de valor inicial que modela la situación. **Indicación:** Recuerde que la fuerza neta es el producto de la masa por la aceleración.

b) Determine la velocidad terminal. Es decir el límite de la función velocidad, cuando t tiende a ∞.

c) Calcule la distancia recorrida por el cuerpo en el instante $t = 1$

P3. Considere el problema de Cauchy

$$(*)\begin{cases} y' &= \dfrac{\cos(y)}{1+y^4} \\ \text{y}(0) &= \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Demuestre que existe una constante positiva K tal que

$$\left|\frac{cos(r)}{1+r^4} - \frac{cos(s)}{1+s^4}\right| \leq K|r-s| \qquad\qquad \forall r, s \in R$$

b) Encuentre una solución definida en todo R del problema de Cauchy y use la parte anterior para demostrar que esa es la única solución al problema $(*)$.

P4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales :

a) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$
Indicación: Busque una solución es $y_1(x) = Cx$

b) $xy^2y' - y^3 = xy^8$

P5. . Encuentre una función $y(x)$, continua para todo $\mathbb{R}$ que cumpla con la siguiente ecuación:

$$y' = xyH(x), \forall x \neq 0$$

Donde $H(x)$ es la función que se conoce como Escalón de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{x} \leq 0 \\ 1 & \text{x} > 0 \end{cases}$$

Propuestos

Prop1 Una población $N(t)$ tiene un crecimiento dado por:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(\beta - N)$$

donde α,β son constantes conocidas y estrictamente positivas. Explique que pasa con la población cuando se empieza con distintas condiciones iniciales positivas. ¿Qué representan α y β

Prop2 . Considere la siguiente ecuación diferencial de primer orden en forma diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + t^4}{tx}$$

a) Sin calcular la solución analíticamente, demuestre que hay una única solución tal que $x(1) = -1$.

b) Muestre que esta ecuación es de Bernoulli y resuélvala. Encuentre la solución particular tal que $x(1) = -1$.

c) ¿Cuál es el intervalo de existencia de la solución que pasa por $(2, 1)$ como solución de la ecuación?

d) Halle dos soluciones que pasen por el punto $(0, 0)$ ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

Resumen de contenidos

Ecuaciones sin termino independiente: $F(y'', y', x) = 0$, hacer el cambio $z(x) = y'(x)$ y $z'(x) = y''(x)$

Ecuaciones sin termino dependiente: $F(y'', y', y) = 0$, hacer el cambio $z(x) = y'(x)$ y $\frac{dz}{dy}(x)z(x) = y''(x)$

Definición: Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz de constante $L > 0$ si:

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Teorema (de Existencia y Unicidad Global o Picard-Lindelöf). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times R \to R$ una función continua en su primera variable y globalmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy.

$$(PC)\begin{cases} y' & = f(\text{t,y}) \\ \text{y}(\text{x}_0) & = \text{y}_0 \end{cases}$$

Obs: Existe la versión local, al probarlo para una vecindad de (x_0, y_0)

Teorema (del Valor Medio). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Obs: Se puede usar para probar Lipschitz, en caso de poder acotar la derivada.