MA2601-8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Petra Zamorano y Vicente Salinas
Fecha: 15 de marzo de 2022

Auxiliar 1

Parte 1: Resolviendo ecuaciones

P1. [**Ecuaciones de integración directa**] Al resolver indique el dominio en donde esta definida la solución.

a) $y' = \tan(2x)^2 \sec(2x)^2$

b) $y' = \dfrac{e^x + 5}{e^x + 5x}$

c) $y' = xe^{-2x}$

P2. [**Ecuaciones de variables separables**] Al resolver indique el dominio en donde esta definida la solución.

a) $xy^4 + (y^2 + 2)e^{-3x}y' = 0$

b) $y' = (y - 2)(y + 2)$

P3. [**Ecuaciones con cambios previos**] Al resolver indique el dominio en donde esta definida la solución.

a) $y' = 1 + e^{y-x+5}$

b) $y' = (-5x + y)^2 + 1$

Parte 2: Modelamiento

P4. Un isótopo radiactivo se desintegra a una tasa que es proporcional a la masa de isótopo presente.

a) Si $x(t)$ representa la masa del isótopo en el instante t, demostrar que $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$ para alguna constante $\lambda > 0$ llamada constante de desintegración.

b) El tiempo T en el que la masa del isótopo se reduce a la mitad se denomina vida media del isótopo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 radiactivo es de 5600 años, determine la masa restante de carbono 14 al cabo de t años, considerando que inicialmente la masa de la muestra era de x_0.

c) Si se sabe que para el año 2022 habría decaído el 75 % del carbono 14 presente en un cráneo encontrado en el valle central de Chile, determinar el año en que falleció el cavernícola a quien perteneció ese cráneo.

Propuestos

Prop1 **[Ecuaciones para resolver]** Al resolver indique el dominio en donde esta definida la solución.

a) $y' = \dfrac{1}{\arctan(x)(x^2+1)}$

b) $y' = \cos(4x)^2$

c) $y' = y^2 - y - 2$

d) $y' = \sin(x)(\cos(2y) - \cos^2(y))$

e) $y' = \dfrac{x-y+4}{y+2x-2}$

f) $y' = \dfrac{2y-x+2}{4}$

Prop2 La ley de enfriamiento de Newton dice:
Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente es pequeña, el calor transferido en una unidad de tiempo entre el cuerpo y la atmósfera es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente. Llamemos $T(t)$ a la temperatura del mar y $T_A(t)$ a la temperatura ambiental. El principio anterior nos permite construir el siguiente modelo.

$$T'(t) = k(T_A(t) - T(t))$$

Donde $k > 0$ es una constante llamada coeficiente de transferencia térmica. Digamos que la temperatura inicial del mar es $T(0) = T_0$ y que $T_A(t) = T_A^0 + A\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Encuentre la temperatura del mar en función del tiempo.

a) $y' = \tan(2x)^2 \sec(2x)^2$ b) $y' = \dfrac{e^x+5}{e^x+5x}$ c) $y' = xe^{-2x}$

a) Como $u = \tan(2x)$

$\Rightarrow du = \sec^2(2x) \cdot 2$

$$\Rightarrow \int \tan(2x)^2 \sec(2x)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{u^3}{6} + C = \frac{\tan(2x)^3}{6} + C$$

Como Dom $\{\tan(2x)^2 \sec(2x)^2\}$

es $\frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ con $K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y = \dfrac{\tan(2x)^3}{6} + C$ con Dominio $\boxed{\frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \; K \in \mathbb{Z}}$

b) $y' = \dfrac{e^x + 5}{e^x + 5x} \Rightarrow \bigg/ \int dx$

$e^x + 5x \neq 0 \Rightarrow$ 1 punto malo

$\Rightarrow y = \int \left(\ln(|e^x + 5x|)\right)' dx$

$\Rightarrow y = \ln(|e^x + 5x|) + C$

$\mathrm{Dom}(y) = \mathbb{R} \setminus \{\bar{x}\}$

con $\bar{x}$ tal que $e^{\bar{x}} + 5\bar{x} = 0$

c) $y' = x e^{-2x} \quad \big/ I_{||}$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\dfrac{e^{-2x}}{2}$

$$\Rightarrow \int x e^{-2x} dx = -\frac{x e^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2} dx$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1) + C}$$

$$\mathrm{Dom}(y) = \mathbb{R}$$

P2 a) $x y^4 + (y^2+2) e^{-3x} y' = 0$

Notemos que $y \equiv 0 \Rightarrow y' \equiv 0$

$\Rightarrow$ $y \equiv 0$ es solución, por lo que la sacaremos

Sea $y \neq 0$

$$xy^4 + (y^2+1)e^{-3x}y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y'\frac{(y^2+1)}{y^4} = -xe^{-3x}$$

Separación de Variables

$$\Rightarrow \int \frac{(y^2+1)}{y^4}\,dy = -\int xe^{-3x}$$

$$\int \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4}\,dy = \frac{e^{-3x}}{9}(3x+1) + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{3y^3} = \frac{e^{-3x}}{9}(3x+1) + C$$

Solución Implicita

b) $y' = (y-2)(y+2)$

Notar que $y \equiv 2$ es solución cte

〃 $y \equiv -2$ 〃

Sacando estas 2 soluciones

$y \neq 2$ e $y \neq -2$

$$\Rightarrow \frac{y'}{(y-2)(y+2)} = 1$$

Fracciones parciales

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right) y' = 1$$

Separación de Variables

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\, dy = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \ln(|y-2|) - \ln(|y+2|) = x + C$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left|\frac{y-2}{y+2}\right| \right) = 4x + \tilde{C} \quad / e^{\wedge}$$

$$\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = Ke^{4x}, \quad e^{\tilde{C}} = K > 0$$

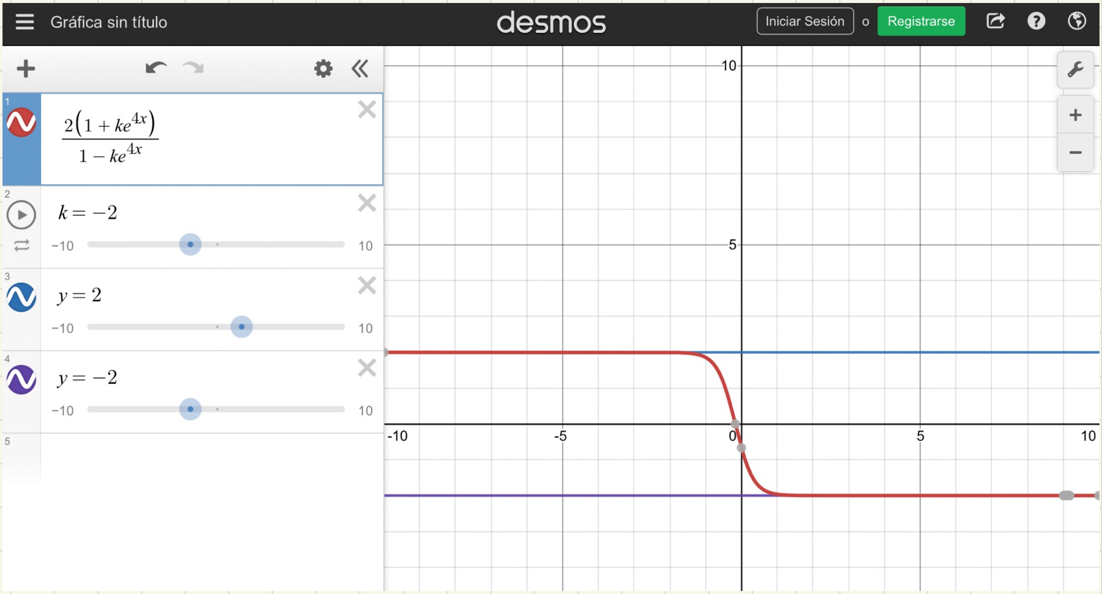
Si usamos que $\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = \left(\frac{y-2}{y+2}\right)$ ó $-\left(\frac{y-2}{y+2}\right)$

(Como $y \neq 2$ e $y \neq -2$)
no cambia de signo

$$\Rightarrow \left(\frac{y-2}{y+2}\right) = K e^{4x}, \quad K \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2(1+ke^{4x})}{1-ke^{4x}}$$

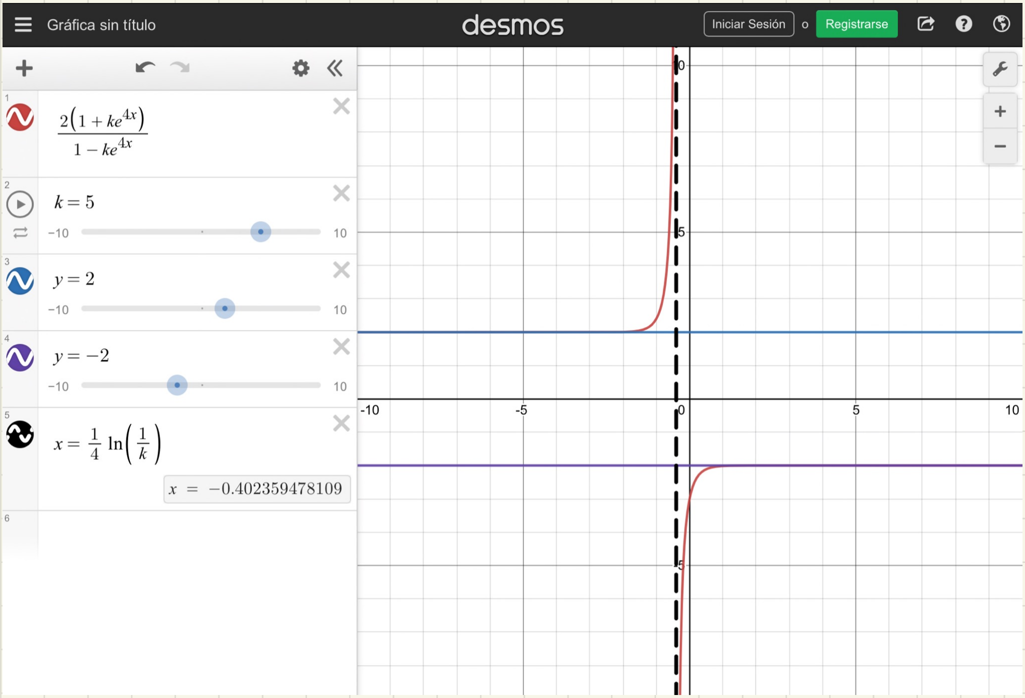
Si: $k<0 \Rightarrow -k>0 \Rightarrow Dom(y)=\mathbb{R}$



Si: $k=0 \Rightarrow y\equiv 2 \Rightarrow Dom(y)$

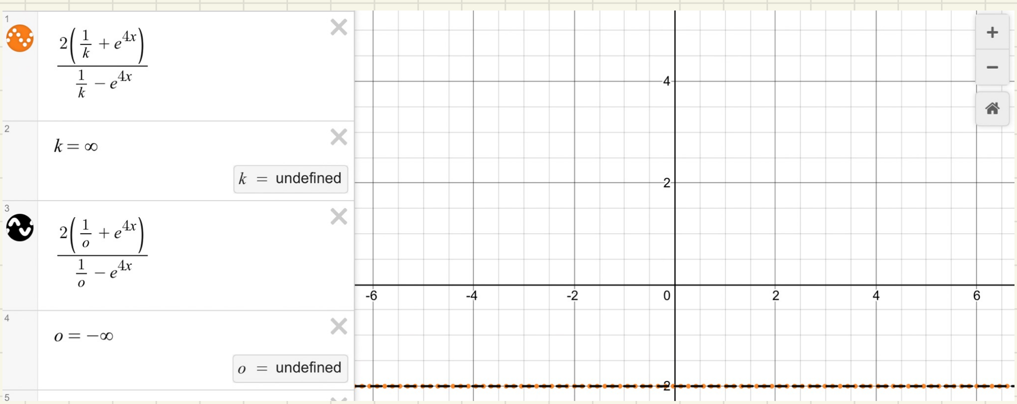
Si: $k>0 \Rightarrow Dom(y)=\mathbb{R}-\{\bar{x}\}$

con $\bar{x}$ t.q. $1=ke^{4\bar{x}} \Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{k}\right)$



$$K \to \infty \quad (o \quad K \to -\infty)$$

$$y = \frac{2\left(\frac{1}{k} + e^{4x}\right)}{\left(\frac{1}{k} - e^{4x}\right)} \Rightarrow y \to \frac{2e^{4x}}{-e^{4x}} = -2$$



P3 a) $\Rightarrow$ $y' - 1 = e^{y - x + 5}$ / $u = y - x$

$u' = y' - 1$

$$\Rightarrow \quad u' = e^{u+5}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-u} u' = e^{5}$$

Separación de Variables

$$\int e^{-u} du = \int e^{s} dx$$

$$-e^{-u} = e^{5}x + C$$

$$\Rightarrow \quad e^{-u} = C - e^{5}x$$

$$-u = \ln(|C - e^{5}x|) \quad / \; \forall x \text{ tq } C - e^{5}x \neq 0$$

$$u = \ln\left(\frac{1}{|C - e^{5}x|}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = x + \ln\left(\frac{1}{|C - e^{5}x|}\right)$$

b) $$y' = (\underbrace{-5x+y}_{})^2 + 1$$

Idea: $u = -5x + y$

Problema: no hay un $-5 + y' = u'$

Solución: Inventarlo

$$\Rightarrow \quad u' + 4 = u^2$$

$$\Rightarrow \quad u' = u^2 - 4 = (u-2)(u+2)$$

Por P1) b

$$\Rightarrow \quad u = \frac{2(1 + Ke^{4x})}{1 - Ke^{4x}}$$

$$\Rightarrow \quad y = 5x + \frac{2(1 + Ke^{4x})}{1 - Ke^{4x}}$$

$\theta \quad y = 5x - 2$

$(y = -2)$

$0 \; k \to \infty$

$\boxed{P4}$ a) Como se desintegra es un cambio negativo

Como es proporcional a la masa : $\alpha X(t)$

$$\Rightarrow \underbrace{X'(t)}_{\text{Cambio}} = \underbrace{-}_{\text{Desintegra}} \underbrace{\alpha X(t)}_{\text{Proporcional a la masa}}$$

$$\Rightarrow X(t) = K e^{-\alpha t}$$

$$X(0) = K e^{0} = K$$

$$\Rightarrow X(t) = X(0) e^{-\alpha t}$$

b) $X(t) = X_0 e^{-\alpha t}$

$$\frac{X_0}{2} = X(5600) = X_0 e^{-\alpha \cdot 5600}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} = e^{-\ln(2)} \Rightarrow -\alpha 5600 = -\ln(2)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\ln(2)}{5600}$$

$$\Rightarrow X(t) = X_0 e^{-\frac{\ln(2)}{5600} t}$$

c) $$\frac{\cancel{X_0}}{4} = X(\tilde{T}) = \cancel{X_0} e^{-\frac{\ln(2)}{5600} \tilde{T}}$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-2} = e^{-2\ln(2)} \Rightarrow -2\cancel{\ln(2)} = -\frac{\cancel{\ln(2)}\,\tilde{T}}{5600}$$

$$\Rightarrow 11200 = \tilde{T}$$

$11.200 - 2022 = 9178$

$\Rightarrow$ Murio en 9178 A. C

Propuesto 1

a) $y' = \dfrac{1}{\arctan(x)(x^2+1)}$

b) $y' = \cos(4x)^2$

c) $y' = y^2 - y - 2$

d) $y' = \sin(x)(\cos(2y) - \cos^2(y))$

e) $y' = \dfrac{x - y + 4}{y + 2x - 2}$

f) $y' = \dfrac{2y - x + 2}{4}$

p2 La ley de enfriamiento de Newton dice:

$u = \arctan(x)$

$du = \dfrac{dx}{x^2+1}$

a) $y = \displaystyle\int \frac{1}{\arctan(x)} \cdot \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{1}{u}\, du$

$= \ln(|u|) + C$

$\Rightarrow y = \ln(|\arctan(x)|) + C$

b) $y' = \cos(4x)^3 = (1 - \sin(4x)^2)\cos(4x)$

$y = \displaystyle\int (1 - \sin(4x)^2)\cos(4x)\, dx$

$u = \sin(4x)$

$du = 4\cos(4x)\, dx$

$y = \displaystyle\int (1 - u^2)\, du = u - \frac{u^3}{3} + C$

$$y = \sin(4x)\left[1 - \frac{\sin^2(4x)}{3}\right] + C$$

c) $y' = y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2)$

Soluciones Ctes $\qquad y \equiv -1$ e $y \equiv 2$

F.P si $y \neq -1$ e $y \neq 2$

$$\int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int dx$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left|\frac{y-2}{y+1}\right|\right) = 3x + C \;/\; e^{\wedge}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y-\cancel{2}}{y+1}\right| = Ke^{3x} \quad , K > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y-2}{y+1}\right) = K e^{3x} \quad / K \neq 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{2+Ke^{3x}}{1-Ke^{3x}}$$

d) $y' = \sin(x)\left[\cos(2y) - \cos^2(y)\right]$

$$= -\sin(x)\sin(y)^2$$

$y = K\pi$ es solución cte $\forall K \in \mathbb{Z}$

$y \neq K\pi$

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sin(y)^2} = -\sin(x)$$

Separación de Variables

$$-\frac{\cos(y)}{\sin(y)} = \cos(x) + C$$

$\boxed{\text{Solución Implícita}}$

e) $y' = \dfrac{x - y + 4}{y + 2x - 2}$

Idea: llevarlo a algo de la forma

$$\frac{X + Y}{X - Y} = \frac{x - y + 4}{y + 2x - 2}$$

$\Rightarrow$ $X + Y = x - y + 4$

$X - Y = y + 2x - 2$

$\cancel{2}X = \dfrac{3x + 2}{2}$

$$Y = \frac{6 - 2y - x}{2}$$

$$y' = -y - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} - y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} - \frac{x+y}{x-y}$$

Hacer cambio $\quad z = \frac{y}{x} \Rightarrow xz' + z = y'$

$$\Rightarrow \quad xz' + z = \frac{1}{2} + \frac{1+z}{z-1}$$

$$xz' = \frac{-2z^2 + 2z + z - 1 + 2 + 2z}{z-1}$$

$$xz' = \frac{-2z^2 + 5z + 1}{z-1}$$

Ahora se puede Hacer Separación de Variables, me da flojera JAJAJA ☺

f) $$y' = \frac{2y - x + 2}{4}$$ / $u = 2y - x$

$u' = 2y' - 1$

$$u' + 1 = \frac{u + 2}{2}$$

$$u' = \frac{u}{2} \Rightarrow u = e^{\frac{x}{2}} + C$$

$$\Rightarrow 2y - x = e^{\frac{x}{2}} + C$$

$$\boxed{y = \frac{x + e^{\frac{x}{2}} + C}{2}}$$

Propuesta 2

La ley de enfriamiento de Newton dice:
Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente es pequeña, el calor transferido en una unidad de tiempo entre el cuerpo y la atmósfera es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente. Llamemos $T(t)$ a la temperatura del mar y $T_A(t)$ a la temperatura ambiental. El principio anterior nos permite construir el siguiente modelo.

$$T'(t) = k(T_A(t) - T(t))$$

Donde $k > 0$ es una constante llamada coeficiente de transferencia térmica. Digamos que la temperatura inicial del mar es $T(0) = T_0$ y que $T_A(t) = T_A^0 + A\,\text{sen}(\omega t)$. Encuentre la temperatura del mar en función del tiempo.

Remplazando:

$$T'(t) = K(T_A^0 + A\sin(wt) - T(t))$$

$$T'(t) + KT(t) = K(T_A^0 + A\sin(wt)) \quad / e^{kt}$$

$$(e^{kt}T(t))' = Ke^{kt}(T_A^0 + A\sin(wt))$$

$$I = \int e^{at}\sin(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a}\sin(bt) - \int \frac{b}{a}e^{at}\cos(bt)\,dt$$

$$= e^{at}\frac{\sin(bt)}{a} - b\frac{e^{at}}{a^2}\cos(bt)$$

$$- \frac{b^2}{a^2} \underbrace{\int e^{at} \sin(bt)\,dt}_{I}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{a^2} I = e^{at} \left[\frac{\sin(bt)}{a} - \frac{b\cos(bt)}{a^2} \right]$$

$$I = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} \left[a\sin(bt) - b\cos(bt) \right]$$

$$e^{Kt} T(t) = T_A^0 e^{Kt} + AK \frac{e^{Kt}}{K^2+w^2} \left[K\sin(wt) - w\cos(wt) \right]$$

$$+ C$$

$$e^{0 \cdot t} T_0 = T_A^0 e^{0t} + \frac{AKe^{0t}}{K^2+w^2} \left[-w \cdot 1 \right] + C$$

$$\Rightarrow C = (T_0 - T_A^0) + \frac{AKw}{K^2+w^2}$$

$$\Rightarrow T(t) = T_0 e^{kt} + (1 - e^{kt}) T_A^{\circ} +$$

$$\frac{AK}{K^2 + w^2}\left[K\sin(wt) - w\cos(wt) + w e^{kt}\right]$$