

Auxiliar 14: Transformada de Laplace 2

Profesor: Axel Osses A.

Auxiliares: Ignacia Echeverría H. y Pablo Zúñiga R.

P1. Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, considere el sistema de EDOs lineal $X'(t) = AX(t)$, $t > 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que A se puede escribir como

$$A = B + C$$

donde $B \in M_3(\mathbb{R})$ es un múltiplo de la matriz identidad y $C \in M_3(\mathbb{R})$ es otra matriz. Pruebe que C es nilpotente, es decir pruebe que C^k es la matriz nula a partir de un cierto entero $k \in \mathbb{N}$.

Solución: De acuerdo a la estructura que tiene A , podemos escribir:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con B , la primera matriz con una constante α y la segunda matriz, como C .
 Por otro lado,

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, C es una matriz nilpotente.

b) Calcule e^B y e^C usando la definición de exponencial de una matriz, es decir, la definición en serie de potencias.

Solución: Notemos que

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha I_3)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \right) I_3 = e^{\alpha} I_3,$$

$$e^C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!} = \sum_{k=0}^2 \frac{C^k}{k!} = I_3 + C + \frac{C^2}{2}.$$

Según los resultados de la parte anterior, tenemos:

$$e^C = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma + \frac{\beta^2}{2} \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Pruebe que $e^{B+C} = e^B e^C$.

Solución: Observemos que

$$BC = \alpha I_3 = \alpha C = \alpha C I_3 = C(\alpha I_3) = CB.$$

Por lo tanto, dado que B y C conmutan, se tiene que

$$e^{B+C} = e^B \cdot e^C.$$

d) Calcule e^{tA} y escriba la solución general de la EDO.

Solución: Por el ítem anterior, tenemos

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t(B+C)} = e^{tB+tC} = e^{tB} \cdot e^{tC} = e^{\alpha t} I_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta t & \gamma t + \frac{(\beta t)^2}{2} \\ 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta t & \gamma t + \frac{(\beta t)^2}{2} \\ 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, la solución general del problema $X'(t) = AX(t)$ con $t > 0$ viene dada por

$$X(t) = e^{tA}C = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & \beta t & \gamma t + \frac{(\beta t)^2}{2} \\ 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son constantes arbitrarias.

P2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con condición inicial:

$$\begin{cases} x'' + y = H(t) \\ y'' + x = \delta(t) \\ x'(0^+) = x(0^+) = y'(0^+) = y(0^+) = 0 \end{cases}$$

Solución: Apliquemos la Transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones. Para la primera, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x'' + y](s) &= \mathcal{L}[H(t)](s) \\ \iff \mathcal{L}[x''](s) + \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s} \\ \iff s^2 \mathcal{L}[x](s) - sx(0^+) - x'(0^+) + \mathcal{L}[y](s) &= \frac{1}{s} \\ \iff s^2 \mathcal{L}[x](s) + \mathcal{L}[y](s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Para la segunda, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + x](s) &= \mathcal{L}[\delta(t)](s) \\ \iff \mathcal{L}[y''](s) + \mathcal{L}[x](s) &= 1 \\ \iff s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) + \mathcal{L}[x](s) &= 1 \\ \iff s^2 \mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[x](s) &= 1 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $-s^2$ y sumando con la segunda, se obtiene

$$(1 - s^4) \mathcal{L}[x](s) = 1 - s \iff \mathcal{L}[y](s) = \frac{1 - s}{1 - s^4} = \frac{1}{(1 + s)(1 + s^2)}$$

Separemos la función racional obtenida con fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{1+s} + \frac{B+Cs}{1+s^2} &= \frac{1}{(1+s)(1+s^2)} \\
 \iff A(1+s^2) + (B+Cs)(1+s) &= 1 \\
 \iff A + As^2 + B + Bs + Cs + Cs^2 &= 1 \\
 \iff (A+C)s^2 + (B+C)s + A + B &= 1 \\
 \implies \begin{cases} A+C=0 \\ B+C=0 \\ A+B=1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La resolución de este sistema entrega $A = 1/2$, $B = 1/2$ y $C = -1/2$, con lo que

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{1}{(1+s)(1+s^2)} = \frac{1}{2(1+s)} + \frac{1-s}{2(1+s^2)} = \frac{1}{2(1+s)} + \frac{1}{2(1+s^2)} - \frac{s}{2(1+s^2)}$$

Tomando antitransformada y usando las transformadas conocidas, se obtiene

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2(1+s)} + \frac{1}{2(1+s^2)} - \frac{s}{2(1+s^2)} \right] (t) \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1+s} \right] (t) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1+s^2} \right] (t) - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{1+s^2} \right] (t) \\
 &= \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\text{sen}(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2}
 \end{aligned}$$

Para determinar $y(t)$, reemplazamos en la segunda ecuación del sistema, obteniendo

$$y(t) = H(t) - x''(t) = H(t) - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\text{sen}(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2}$$

P3. Resuelva la siguiente ecuación integro-diferencial con condición inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = \text{sen}(t) + \int_0^t y(t-s) \cos(s) ds \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Solución: Apliquemos la Transformada de Laplace a la ecuación:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[y'(t)](s) &= \mathcal{L}\left[\sin(t) + \int_0^t y(t-s) \cos(s) ds\right](s) \\
 s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0) &= \mathcal{L}[\sin(t)](s) + \mathcal{L}\left[\int_0^t y(t-s) \cos(s) ds\right](s) \\
 s\mathcal{L}[y(t)](s) &= \frac{1}{s^2+1} + \mathcal{L}[(y * \cos(\cdot))(t)](s) \\
 s\mathcal{L}[y(t)](s) &= \frac{1}{s^2+1} + \mathcal{L}[y(t)](s)\mathcal{L}[\cos(t)](s) \\
 s\mathcal{L}[y(t)](s) &= \frac{1}{s^2+1} + \mathcal{L}[y(t)](s)\frac{s}{s^2+1} \\
 \mathcal{L}[y(t)](s) &= \frac{1}{s^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}[t^2](s) \\
 y(t) &= \frac{t^2}{2}
 \end{aligned}$$

P4. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

Indicación: defina $G(t) := \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$ y calcule su Transformada de Laplace.

Solución: Siguiendo la indicación, definimos $G(t) := \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$ y luego

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[G](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx \right) dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-st} \cos(tx)}{1+x^2} dx dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-st} \cos(tx)}{1+x^2} dt dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^\infty e^{-st} \cos(tx) dt \right) dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{\mathcal{L}[\cos(tx)](s)}{1+x^2} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{s}{(1+x^2)(s^2+x^2)} dx = s \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(s^2+x^2)}
 \end{aligned}$$

Separemos por fracciones parciales la función integrada:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1+x^2)(s^2+x^2)} &= \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{s^2+x^2} \iff 1 = (Ax+B)(s^2+x^2) + (Cx+D)(1+x^2) \\
 &\iff 1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (As^2+C)x + Bs^2 + D \\
 &\implies A+C=0, B+D=0, As^2+C=0, Bs^2+D=1 \\
 &\implies A=0, B=\frac{1}{s^2-1}, C=0, D=-\frac{1}{s^2-1}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[G](s) &= s \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(s^2+x^2)} \\
 &= \frac{s}{s^2-1} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} - \frac{s}{s^2-1} \int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2} \\
 &= \frac{s}{s^2-1} \arctan(x) \Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2-1} \int_0^\infty \frac{dx/s}{1+(\frac{x}{s})^2} \\
 &= \frac{s}{s^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{s^2-1} \cdot \arctan\left(\frac{x}{s}\right) \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{s}{s^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{s^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2(s^2-1)}(s-1) = \frac{\pi}{2(s+1)}
 \end{aligned}$$

Tomando antitransformada, se concluye que

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\pi}{2(s+1)} \right] (t) = \frac{\pi}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] (t) = \frac{\pi e^{-t}}{2}$$

y con esto,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = G(1) = \frac{\pi e^{-1}}{2} = \frac{\pi}{2e}$$