

Auxiliar 14: Transformada de Laplace 2

Profesor: Axel Osses A.

Auxiliares: Ignacia Echeverría H. y Pablo Zúñiga R.

P1. Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, considere el sistema de EDOs lineal $X'(t) = AX(t)$, $t > 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que A se puede escribir como

$$A = B + C$$

donde $B \in M_3(\mathbb{R})$ es un múltiplo de la matriz identidad y $C \in M_3(\mathbb{R})$ es otra matriz. Pruebe que C es nilpotente, es decir pruebe que C^k es la matriz nula a partir de un cierto entero $k \in \mathbb{N}$.

b) Calcule e^B y e^C usando la definición de exponencial de una matriz, es decir, la definición en serie de potencias.

c) Pruebe que $e^{B+C} = e^B e^C$.

d) Calcule e^{tA} y escriba la solución general de la EDO.

P2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con condición inicial:

$$\begin{cases} x'' + y = H(t) \\ y'' + x = \delta(t) \\ x'(0^+) = x(0^+) = y'(0^+) = y(0^+) = 0 \end{cases}$$

P3. Resuelva la siguiente ecuación integro-diferencial con condición inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t) + \int_0^t y(t-s) \cos(s) ds \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

P4. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

Indicación: defina $G(t) := \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$ y calcule su Transformada de Laplace.

Resumen de contenidos

Definición (Exponencial de una matriz). Sea $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Se define la **exponencial de M** como

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{6} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Proposición (Propiedades de la exponencial de una matriz). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ matrices con coeficientes constantes y $s, t \in \mathbb{R}$. Se tienen las siguientes propiedades:

- a) $e^{0_{nn} \cdot t} = e^{A \cdot 0} = I$ (0_{nn} es la matriz cuadrada con entradas nulas).
- b) $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$ (donde $' := \frac{d}{dt}$).
- c) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$. En particular, e^{At} es invertible con $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.
- d) $AB = BA \iff Be^{At} = e^{At}B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- e) $AB = BA \iff e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición (Transformada de Laplace). Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Se define la **Transformada de Laplace** de f como

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

para aquellos $s \in \mathbb{R}$ tales que la integral anterior converja. En caso que la integral anterior exista para $s > c$ para c algún número que depende de f , se dirá que c es la **asíntota** de la transformada.

Proposición (Linealidad de $\mathcal{L}[\cdot]$). La Transformada de Laplace es un operador lineal (sobre funciones), es decir, para todo par de funciones f y g integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathcal{L}[f + \lambda g] = \mathcal{L}[f] + \lambda \mathcal{L}[g]$$

Definición (Función de orden exponencial). Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dirá que f es de **orden exponencial** si existen constantes $M \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$. Al menor $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisfaga lo anterior se le denomina **orden exponencial** de f y en tal caso denotamos $\mathcal{C}_\alpha$ al conjunto de todas las funciones de orden exponencial α .

Definición (Convolución de funciones). Sean $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la **convolución** de f y g como la **función**

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

Proposición. El producto de convolución es conmutativo, asociativo y distribuye con respecto a la suma en $\mathcal{C}_\alpha$, es decir, para todas $f, g, h \in \mathcal{C}_\alpha$ se tienen:

- a) $f * g = g * f$ (conmutatividad).
- b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociatividad).
- c) $f * (g + h) = f * g + f * h$ (distributividad sobre la suma en $\mathcal{C}_\alpha$).

Proposición. El producto de convolución es conmutativo, asociativo y distribuye con respecto a la suma en $\mathcal{C}_\alpha$, es decir, para todas $f, g, h \in \mathcal{C}_\alpha$ se tienen:

- a) $f * g = g * f$ (conmutatividad).
- b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociatividad).
- c) $f * (g + h) = f * g + f * h$ (distributividad sobre la suma en $\mathcal{C}_\alpha$).

Definición (Antitransformada de Laplace). Sean $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\rho : (s, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones, donde f es de orden exponencial y s es la asíntota de la transformada de f , tales que $\mathcal{L}[f] = \rho$. Entonces f se llama la **antitransformada** (de Laplace) de la función ρ y lo denotamos $\mathcal{L}^{-1}[\rho] = f$. El operador $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ de antitransformada está bien definido gracias al Teorema de Lerch y es lineal.

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$	$t \operatorname{sen}(wt)$	$\frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$e^{\sigma t} \operatorname{sen}(wt)$	$\frac{w}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$	$e^{\sigma t} \cos(wt)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$t^k e^{\lambda t}$	$\frac{k!}{(s - \lambda)^{k+1}}$	$\operatorname{senh}(wt)$	$\frac{w}{s^2 - w^2}$
$\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$	$\operatorname{cosh}(wt)$	$\frac{s}{s^2 - w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\delta_a(t)$	e^{-as}

Cuadro 1: Transformadas de Laplace más importantes.

Proposición (Propiedades de la Transformada de Laplace). Sean $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de orden exponencial e integrables, y $a \in \mathbb{R}$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

a) **Transformada de Laplace de las derivadas.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\mathcal{L} \left[f^{(n)} \right] (s) = s^n \mathcal{L} [f] (s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+)$$

b) **Transformada de Laplace de una primitiva.**

$$\mathcal{L} \left[\int_a^t f(u) du \right] (s) = \frac{1}{s} \mathcal{L} [f] (s) - \frac{1}{s} \int_0^a f(u) du$$

c) **Traslación en el dominio temporal.**

$$\mathcal{L} [H(t-a)f(t-a)] (s) = e^{-as} \mathcal{L} [f] (s)$$

d) **Traslación en el dominio de frecuencias.**

$$\mathcal{L} [f(t)] (s-a) = \mathcal{L} [e^{at} f(t)] (s)$$

e) **Derivadas de la Transformada de Laplace.**

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L} [f(t)] (s) = (-1)^n \mathcal{L} [t^n f(t)] (s)$$

f) **Integral de la Transformada de Laplace.**

$$\int_0^s \mathcal{L} [f] (u) du = -\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$$

g) **Transformada de Laplace de funciones periódicas.** Si f es T -periódica, entonces

$$\mathcal{L} [f] (s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

h) **Transformada de Laplace de una convolución.**

$$\mathcal{L} [f * g] (s) = \mathcal{L} [f] (s) \mathcal{L} [g] (s)$$