Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
6 de junio de 2022

Auxiliar 13: Transformada de Laplace

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Ignacia Echeverría H. y Pablo Zúñiga R.

P1. Calcule la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{senh}(t)$.

Solución: Recordemos que el seno hiperbólico es $\operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Usando esto más la linealidad de $\mathcal{L}[\cdot]$ y la transformada de $e^{\lambda t}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\operatorname{senh}(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right](s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^t\right](s) - \mathcal{L}\left[e^{-t}\right](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s^2-1}
\end{aligned}$$

b) **(Propuesto)** $\cosh(t)$. **Indicación:** Recordar $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

Solución: Recordemos que el coseno hiperbólico es $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. Usando esto más la linealidad de $\mathcal{L}[\cdot]$ y la transformada de $e^{\lambda t}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\cosh(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right](s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^t\right](s) + \mathcal{L}\left[e^{-t}\right](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) = \frac{s}{s^2-1}
\end{aligned}$$

c) $e^{\sigma t}\operatorname{sen}(wt)$.

Solución: Usemos la propiedad de la **Traslación en el dominio de frecuencias**, probada en **P1.** b). Poniendo $f(t) = \operatorname{sen}(wt)$ y $a = \sigma$ en dicha propiedad, se obtiene que

$$\mathcal{L}\left[e^{\sigma t}\operatorname{sen}(wt)\right](s) = \mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(wt)\right](s-\sigma) = \frac{w}{(s-\sigma)^2 + w^2}$$

d) **(Propuesto)** $e^{\sigma t}\cos(wt)$.

Solución: Usemos la propiedad de la **Traslación en el dominio de frecuencias**, probada en **P1.** b). Poniendo $f(t) = \cos(wt)$ y $a = \sigma$ en dicha propiedad, se obtiene que

$$\mathcal{L}\left[e^{\sigma t}\cos(wt)\right](s) = \mathcal{L}\left[\cos(wt)\right](s-\sigma) = \frac{s}{(s-\sigma)^2 + w^2}$$

e) t^k con $k \in \mathbb{N}$.

Solución: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Usemos la propiedad de la **Derivada de una transformada**, probada en **P1.** c). Reemplazando $f \equiv 1$ en dicha propiedad, se obtiene

$$\mathcal{L}\left[t^k\right](s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}\left[1\right](s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{s} = (-1)^k(-1)^k\frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

P2. Determine la Transformada Inversa de Laplace (o Antitransformada) de las siguientes funciones:

a) $\frac{se^{-2s}}{s^2+4s+13}$.

Solución: Sea f la antitransformada de $\frac{s}{s^2+4s+13}$. Gracias a la propiedad de traslación en el dominio temporal podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{se^{-2s}}{s^2+4s+13} &= e^{-2s}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[H(t-2)f(t-2)\right](s) \\ \iff \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-2s}}{s^2+4s+13}\right](t) &= H(t-2)f(t-2) \end{aligned}$$

Ahora, para determinar f, simplemente notamos que

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2+4s+13} &= \frac{s}{s^2+4s+4+9} = \frac{s}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2-2}{(s+2)^2+9} \\ &= \frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{2}{(s+2)^2+9} \\ &= \mathcal{L}\left[\cos(3t)\right](s+2) - \frac{2}{3}\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(3t)\right](s+2) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos(3t)\right](s) - \frac{2}{3}\mathcal{L}\left[e^{-2t}\operatorname{sen}(3t)\right](s) \end{aligned}$$

Tomando antitransformada, se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4s+13}\right](t) = e^{-2t}\cos(3t) - \frac{2}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}(3t) = f(t)$$

Juntando todo lo anterior, se concluye

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-2s}}{s^2+4s+13}\right](t) = H(t-2)\left(e^{-2(t-2)}\cos(3(t-2)) - \frac{2}{3}e^{-2(t-2)}\operatorname{sen}(3(t-2))\right)$$

b) $\ln\left(\frac{s^2-1}{s^2+1}\right)$, $s > 1$.

Solución: Sea f la antitransformada de $\ln\left(\frac{s^2-1}{s^2+1}\right)$. Gracias a la propiedad de la derivada de la transformada se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f\right](s) &= \ln\left(\frac{s^2-1}{s^2+1}\right) \\
\Longrightarrow \frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) &= \frac{4s}{(s^2-1)(s^2+1)} \\
\Longleftrightarrow -\mathcal{L}\left[tf(t)\right](s) &= \frac{4s}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}
\end{aligned}
$$

Separamos en fracciones parciales la función racional de la derecha, es decir, encontramos A, B, C y D tales que

$$
\begin{aligned}
&\frac{4s}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\
\Longleftrightarrow\ & 4s = A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)(s+1) \\
\Longleftrightarrow\ & 4s = (A+B+C)s^3 + (A-B+D)s^2 + (A+B-C)s + A-B-D \\
\Longrightarrow\ & A+B+C=0, A-B+D=0, A+B-C=4, A-B-D=0 \\
\Longrightarrow\ & A=1, B=1, C=-2, D=0
\end{aligned}
$$

Con esto, tenemos

$$
\begin{aligned}
&-\mathcal{L}\left[tf(t)\right](s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} - \frac{2s}{s^2+1} \\
\Longleftrightarrow\ & -tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right](t) \\
\Longleftrightarrow\ & -tf(t) = e^t + e^{-t} - 2\cos(t) \\
\Longleftrightarrow\ & f(t) = \frac{2\cos(t) - e^t - e^{-t}}{t}
\end{aligned}
$$

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando Transformada de Laplace:

a) $x''' - x'' + x' - x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -1$.

Solución: Apliquemos Transformada de Laplace a la ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[x''' - x'' + x' - x\right](s) &= \mathcal{L}\left[0\right](s) \\
\Longleftrightarrow \mathcal{L}\left[x'''\right](s) - \mathcal{L}\left[x''\right](s) + \mathcal{L}\left[x'\right](s) - \mathcal{L}\left[x\right](s) &= 0
\end{aligned}
$$

Calculando cada término por separado:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[x'''\right](s) &= s^3\mathcal{L}\left[x\right](s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0) = s^3\mathcal{L}\left[x\right](s) - s^2 - 2s + 1 \\
\mathcal{L}\left[x''\right](s) &= s^2\mathcal{L}\left[x\right](s) - sx(0) - x'(0) = s^2\mathcal{L}\left[x\right](s) - s - 2 \\
\mathcal{L}\left[x'\right](s) &= s\mathcal{L}\left[x\right](s) - x(0) = s\mathcal{L}\left[x\right](s) - 1
\end{aligned}
$$

Juntando todo:

$$\begin{aligned}
&s^3\mathcal{L}[x](s) - s^2 - 2s + 1 - s^2\mathcal{L}[x](s) + s + 2 + s\mathcal{L}[x](s) - 1 - \mathcal{L}[x](s) = 0 \\
\iff &(s^3 - s^2 + s - 1)\mathcal{L}[x](s) - s^2 - s + 2 = 0 \iff \mathcal{L}[x](s) = \frac{s^2+s-2}{s^3-s^2+s-1} \\
\iff &\mathcal{L}[x](s) = \frac{(s+2)(s-1)}{s^2(s-1)+s-1} = \frac{(s+2)(s-1)}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{s+2}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Tomando antitransformada, y utilizando las transformadas conocidas, concluimos que:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right](t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[\cos(\cdot)](s)\right](t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[\mathrm{sen}(\cdot)](s)\right](t) \\
&= \cos(t) + 2\,\mathrm{sen}(t)
\end{aligned}$$

b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Solución: Apliquemos Transformada de Laplace a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[y'' - 4y' + 4y\right](s) = \mathcal{L}\left[e^{2t}\right](s) \\
\iff &\mathcal{L}\left[y''\right](s) - 4\mathcal{L}\left[y'\right](s) + 4\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s-2} \\
\iff &s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) - 4(s\mathcal{L}[y](s) - y(0)) + 4\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s-2} \\
\iff &s^2\mathcal{L}[y](s) - s - 1 - 4(s\mathcal{L}[y](s) - 1) + 4\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s-2} \\
\iff &(s^2 - 4s + 4)\mathcal{L}[y](s) - s + 3 = \frac{1}{s-2} \\
\iff &\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s^2-4s+4)(s-2)} + \frac{s-3}{s^2-4s+4} \\
\iff &\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{s-3}{(s-2)^2} \\
\iff &y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^3}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-2)^2}\right](t)
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de la Transformada de Laplace y transformadas conocidas, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^3}\right](t) &= e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right](t) = \frac{t^2e^{2t}}{2} \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-2)^2}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2-1}{(s-2)^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right](t) \\
&= e^{2t} - e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = e^{2t} - te^{2t}
\end{aligned}$$

con lo que se concluye

$$y(t) = e^{2t}\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)$$

P4. Sean $w > 0$, $n \geq 1$. Denotaremos $L_n = \mathcal{L}[\operatorname{sen}^n(wt)]$. El objetivo es calcular L_n para cada $n \geq 1$.

a) Calcular L_1 y L_2. **Indicación:** Calcule $\mathcal{L}[e^{at}]$ para $a \in \mathbb{C}$ y utilice convenientemente la linealidad de $\mathcal{L}[\cdot]$ en la fórmula $e^{iwt} = \cos(wt) + i\operatorname{sen}(wt)$.

Solución: Siguiendo la indicación, calculamos

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^\infty$$

La expresión anterior tiene sentido para $s > Re(a)$, dando como resultado

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$$

Luego, si $a = iw$, se obtiene la fórmula

$$\mathcal{L}[e^{iwt}](s) = \frac{1}{s-iw} = \frac{s+iw}{s^2+w^2} = \frac{s}{s^2+w^2} + i\frac{w}{s^2+w^2}$$

Por otro lado, como $e^{iwt} = \cos(wt) + i\operatorname{sen}(wt)$, se tiene por linealidad de $\mathcal{L}[\cdot]$ que

$$\frac{s}{s^2+w^2} + i\frac{w}{s^2+w^2} = \mathcal{L}[e^{iwt}](s) = \mathcal{L}[\cos(wt)](s) + i\mathcal{L}[\operatorname{sen}(wt)](s)$$

Por igualdad de números complejos, se concluye que

$$L_1(s) = \mathcal{L}[\operatorname{sen}(wt)](s) = \frac{w}{s^2+w^2} \quad \left(\text{y además } \mathcal{L}[\cos(wt)](s) = \frac{s}{s^2+w^2}\right)$$

Por su lado, calculamos L_2 por definición

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\operatorname{sen}^2(wt)](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^2(wt)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{1-\cos(2wt)}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{-st}\cos(2wt)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(2wt)](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4w^2}\right) = \frac{2w^2}{s(s^2+4w^2)}
\end{aligned}$$

b) Pruebe que $L_n = L_{n-2} - \mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)]$ para cada $n \geq 3$. **Indicación:** Considere integrar por partes en b) y c).

Solución: Sea $n \geq 3$. Calculando L_n por definición, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\operatorname{sen}^n(wt)](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^n(wt)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\operatorname{sen}^2(wt)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^{n-2}(wt)(1-\cos^2(wt))dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^{n-2}(wt)dt - \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)dt \\
&= \mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)](s) - \mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)](s) \\
&= L_{n-2}(s) - \mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)](s)
\end{aligned}$$

c) Compruebe que

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)](s) = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{s^2}{w^2n(n-1)}\right)L_n$$

para cada $n \geq 3$.

Solución: Nuevamente, hacemos el cálculo por definición:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\cos(wt)\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos(wt)dt
\end{aligned}$$

Para integrar por partes, hacemos

$$\begin{aligned}
u = e^{-st}\cos(wt) &\implies du = (-we^{-st}\operatorname{sen}(wt) - se^{-st}\cos(wt))dt \\
dv = \operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos(wt)dt &\implies v = \frac{\operatorname{sen}^{n-1}(wt)}{w(n-1)}
\end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-st}\cos(wt)\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos(wt)dt \\
&= \cancelto{0}{\frac{e^{-st}\cos(wt)\operatorname{sen}^{n-1}(wt)}{w(n-1)}\Big|_0^\infty} - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^{n-1}(wt)}{w(n-1)}(-we^{-st}\operatorname{sen}(wt) - se^{-st}\cos(wt))dt \\
&= \frac{1}{w(n-1)}\left(w\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^n(wt)dt}_{\mathcal{L}[\operatorname{sen}^n(wt)](s)} + s\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^{n-1}(wt)\cos(wt)dt\right) \\
&= \frac{1}{w(n-1)}\left(wL_n(s) + s\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^{n-1}(wt)\cos(wt)dt\right)
\end{aligned}$$

Para la integral faltante, hacemos

$$\begin{aligned} u = e^{-st} &\implies du = -se^{-st}dt \\ dv = \operatorname{sen}^{n-1}(wt)\cos(wt)dt &\implies v = \frac{\operatorname{sen}^n(wt)}{wn} \end{aligned}$$

obteniendo

$$\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^{n-1}(wt)\cos(wt)dt = \cancelto{0}{\frac{e^{-st}\operatorname{sen}^n(wt)}{wn}\bigg|_0^\infty} + \frac{s}{wn}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^n(wt)dt}_{\mathcal{L}[\operatorname{sen}^n(wt)](s)} = \frac{s}{wn}L_n(s)$$

con lo que finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st}\cos(wt)\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos(wt)dt &= \frac{1}{w(n-1)}\left(wL_n(s) + \frac{s^2}{wn}L_n(s)\right) \\ &= \left(\frac{1}{n-1} + \frac{s^2}{w^2n(n-1)}\right)L_n(s) \end{aligned}$$

d) Deduzca que

$$L_n(s) = \frac{w^2n(n-1)}{s^2+w^2n^2}L_{n-2}(s)$$

Solución: De la parte *b*) y *c*) se tiene que

$$L_n(s) = L_{n-2}(s) - \mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)](s) = L_{n-2}(s) - \left(\frac{1}{n-1} + \frac{s^2}{w^2n(n-1)}\right)L_n(s)$$

Despejando $L_n(s)$, se concluye que

$$L_n(s) = \frac{w^2n(n-1)}{w^2n^2+s^2}L_{n-2}(s)$$

En resumen, se tiene que

$$L_n(s) = \begin{cases} \frac{w}{s^2+w^2} & n=1 \\ \frac{2w^2}{s(s^2+4w^2)} & n=2 \\ \frac{w^2n(n-1)}{w^2n^2+s^2}L_{n-2}(s) & n \geq 3 \end{cases}$$