Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
6 de junio de 2022

Auxiliar 13: Transformada de Laplace

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Ignacia Echeverría H. y Pablo Zúñiga R.

P1. Calcule la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{senh}(t)$.

b) **(Propuesto)** $\cosh(t)$. **Indicación:** Recordar $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$

c) $e^{\sigma t}\operatorname{sen}(wt)$.

d) **(Propuesto)** $e^{\sigma t}\cos(wt)$.

e) t^k con $k \in \mathbb{N}$.

P2. Determine la Transformada Inversa de Laplace (o Antitransformada) de las siguientes funciones:

a) $\frac{se^{-2s}}{s^2+4s+13}$.

b) $\ln\left(\frac{s^2-1}{s^2+1}\right)$, $s > 1$.

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando Transformada de Laplace:

a) $x''' - x'' + x' - x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -1$.

b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 1$.

P4. Sean $w > 0$, $n \geq 1$. Denotaremos $L_n = \mathcal{L}[\operatorname{sen}^n(wt)]$. El objetivo es calcular L_n para cada $n \geq 1$.

a) Calcular L_1 y L_2. **Indicación:** Calcule $\mathcal{L}[e^{at}]$ para $a \in \mathbb{C}$ y utilice convenientemente la linealidad de $\mathcal{L}[\cdot]$ en la fórmula $e^{iwt} = \cos(wt) + i\operatorname{sen}(wt)$.

b) Pruebe que $L_n = L_{n-2} - \mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)]$ para cada $n \geq 3$. **Indicación:** Considere integrar por partes en b) y c).

c) Compruebe que

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}^{n-2}(wt)\cos^2(wt)](s) = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{s^2}{w^2n(n-1)}\right)L_n$$

para cada $n \geq 3$.

d) Deduzca que

$$L_n(s) = \frac{w^2n(n-1)}{s^2+w^2n^2}L_{n-2}(s)$$

Resumen de contenidos

Definición (Transformada de Laplace). Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable. Se define la **Transformada de Laplace** de f como

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

para aquellos $s \in \mathbb{R}$ tales que la integral anterior converja. En caso que la integral anterior exista para $s > c$ para c algún número que depende de f, se dirá que c es la **asíntota** de la transformada.

Proposición (Linealidad de $\mathcal{L}[\cdot]$). La Transformada de Laplace es un operador lineal (sobre funciones), es decir, para todo par de funciones f y g integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathcal{L}[f + \lambda g] = \mathcal{L}[f] + \lambda \mathcal{L}[g]$$

Definición (Función de orden exponencial). Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función. Se dirá que f es de **orden exponencial** si existen constantes $M \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$. Al menor $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisfaga lo anterior se le denomina **orden exponencial** de f y en tal caso denotamos $\mathcal{C}_\alpha$ al conjunto de todas las funciones de orden exponencial α.

Definición (Convolución de funciones). Sean $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define la **convolución** de f y g como la **función**

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

Proposición. El producto de convolución es conmutativo, asociativo y distribuye con respecto a la suma en $\mathcal{C}_\alpha$, es decir, para todas $f, g, h \in \mathcal{C}_\alpha$ se tienen:

1. $f * g = g * f$ (conmutatividad).
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociatividad).
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$ (distributividad sobre la suma en $\mathcal{C}_\alpha$).

Teorema (Lerch). Si f y g son funciones de orden exponencial tales que $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, entonces $f = g$ (salvo, quizás, en la unión de puntos de discontinuidad de f y g).

Definición (Antitransformada de Laplace). Sean $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $\rho : (s, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones, donde f es de orden exponencial y s es la asíntota de la transformada de f, tales que $\mathcal{L}[f] = \rho$. Entonces f se llama la **antitransformada** (de Laplace) de la función ρ y lo denotamos $\mathcal{L}^{-1}[\rho] = f$. El operador $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ de antitransformada está bien definido gracias al Teorema de Lerch y es lineal.

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$	$t\,\mathrm{sen}(wt)$	$\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$e^{\sigma t}\,\mathrm{sen}(wt)$	$\frac{w}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}$	$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$t^k e^{\lambda t}$	$\frac{k!}{(s-\lambda)^{k+1}}$	$\mathrm{senh}(wt)$	$\frac{w}{s^2-w^2}$
$\mathrm{sen}(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\cosh(wt)$	$\frac{s}{s^2-w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\delta_a(t)$	e^{-as}

Cuadro 1: Transformadas de Laplace más importantes.

Proposición (Propiedades de la Transformada de Laplace). Sean $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones de orden exponencial e integrables, y $a \in \mathbb{R}$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. **Transformada de Laplace de las derivadas.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+)$$

2. **Transformada de Laplace de una primitiva.**

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u)du\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du$$

3. **Traslación en el dominio temporal.**

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$$

4. **Traslación en el dominio de frecuencias.**

$$\mathcal{L}[f(t)](s-a) = \mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)$$

5. **Derivadas de la Transformada de Laplace.**

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = (-1)^n \mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](s)$$

6. **Integral de la Transformada de Laplace.**

$$\int_0^s \mathcal{L}\left[f\right](u)du = -\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$$

7. **Transformada de Laplace de funciones periódicas.** Si f es T-periódica, entonces

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

8. **Transformada de Laplace de una convolución.**

$$\mathcal{L}\left[f * g\right](s) = \mathcal{L}\left[f\right](s)\mathcal{L}\left[g\right](s)$$

Observaciones:

- La Tranformada de Laplace es un operador que actúa **sobre funciones** y entrega **otra función**. Tener muy presente que los objetos $\mathcal{L}[f]$ y $\mathcal{L}[f](s)$ no son lo mismo: el primero es la Transformada de Laplace de f, y el segundo es la Transformada de Laplace de f **evaluada en** s.

- Cada vez que se escribe $\mathcal{L}[f(t)](s)$ en lugar de $\mathcal{L}[f](s)$ se está cometiendo un **abuso de notación**, pues f denota a la función y $f(t)$ es la función evaluada en t. Cometemos este abuso de notación **solamente para reconocer fácilmente la función a la que le estamos calculando su Transformada de Laplace**. Por esto, $\mathcal{L}[f(t)]$ siempre debe entenderse como $\mathcal{L}[f]$, y es esta última notación la más formal o rigurosa.

- Las Transformadas de Laplace más importantes se adjuntan en la Tabla 1 y adquieren tal calificativo por constituir la base para el cálculo de transformadas más difíciles, con ayuda de las propiedades de $\mathcal{L}[\cdot]$.

- La Transformada de Laplace convierte **ecuaciones diferenciales** en **ecuaciones algebraicas**. Nos despojamos del enfoque típico de los capítulos anteriores, es decir, aplicaremos $\mathcal{L}[\cdot]$ en nuestras EDO y despejaremos la transformada de nuestra función incógnita, para concluir calculando la antitransformada de la expresión resultante.

- Dado lo anterior, es muy útil (nuevamente) tener presente el procedimiento de **descomposición en fracciones parciales**.