Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
24 de mayo de 2022

Auxiliar 11: Sistemas Lineales

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Ignacia Echeverría H. y Pablo Zúñiga R.

P1. (Propuesto) Encuentre la solución general del siguiente sistema lineal de orden 2:

$$X'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X$$

Indicación: diagonalice la matriz del sistema e introduzca un cambio de variable adecuado para obtener tres ecuaciones de segundo orden independientes entre sí.

Solución: Diagonalicemos la matriz del sistema. Para ello, encontramos los valores propios en las raíces del polinomio característico asociado:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((-1-\lambda)(2-\lambda)+2) = \lambda(2-\lambda)(\lambda-1)$$

de donde $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$ son los valores propios de la matriz. Ahora, calculamos los vectores propios asociados:

- $\lambda_1 = 0$. Buscamos $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - \lambda_1 I)(u, v, w) = A(u, v, w) = (0, 0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2u = 0 \\ -2u - v + 2w = 0 \\ -u - v + 2w = 0 \end{cases}$$

  Como $u = 0$, se tiene que $v = 2w$, con lo que tomando $w = 1$ se obtiene el vector propio $(0, 2, 1)$.

- $\lambda_2 = 1$. Nuevamente buscamos $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - \lambda_2 I)(u, v, w) = (A - I)(u, v, w) = (0, 0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u = 0 \\ -2u - 2v + 2w = 0 \\ -u - v + w = 0 \end{cases}$$

  Como $u = 0$, las otras ecuaciones nos dicen que $v = w$. Tomando $w = 1$, se obtiene el vector propio $(0, 1, 1)$.

- $\lambda_3 = 2$. Nuevamente buscamos $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - \lambda_3 I)(u, v, w) = (A - 2I)(u, v, w) =$

$(0,0,0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2u - 3v + 2w = 0 \\ -u - v = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación nos dice que $v = -u$, y reemplazando en la primera se obtiene $w = -u/2$. Tomando $u = 2$, se obtiene el vector propio $(2, -2, -1)$.

Con todo lo anterior, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =: PDP^{-1}$$

de modo que el sistema queda $X'' = PDP^{-1}X$. Multiplicando por P^{-1} a la izquierda, el sistema anterior se escribe de forma equivalente como $P^{-1}X'' = DP^{-1}X$. Haciendo el cambio de variable $(y_1, y_2, y_3) = Y = P^{-1}X$, se tiene que $Y'' = P^{-1}X''$ con lo que

$$X'' = PDP^{-1}X \quad \xrightarrow{c.v.} \quad Y'' = DY$$

¿Qué se ha ganado con este cambio de variable? El nuevo sistema de segundo orden está compuesto por ecuaciones diferenciales de segundo orden **independientes entre sí**, pues D es una matriz diagonal. En efecto,

$$Y'' = DY \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y_1'' = 0 \\ y_2'' = y_2 \\ y_3'' = 2y_3 \end{cases}$$

Luego, usando el polinomio característico, las soluciones de las tres ecuaciones anteriores son

$$y_1(t) = C_1 + C_2 t, \quad y_2(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t}, \quad y_3(t) = C_5 e^{\sqrt{2}t} + C_6 e^{-\sqrt{2}t}$$

donde $C_1, \ldots, C_6 \in \mathbb{R}$ son constantes. Recuperando el cambio de variable, se obtiene

$$\begin{aligned} X = PY &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_3 e^t + C_4 e^{-t} \\ C_5 e^{\sqrt{2}t} + C_6 e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \\ &= (C_1 + C_2 t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (C_3 e^t + C_4 e^{-t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (C_5 e^{\sqrt{2}t} + C_6 e^{-\sqrt{2}t}) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

P2. Encuentre la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{-2t} \\ y' = x + 2y - e^{-2t} \end{cases}$$

Solución: Definiendo $X = (x, y)$, el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas puede llevarse a un sistema lineal de primer orden no homogéneo dado por

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Denotaremos por A a la matriz del sistema y $B(t)$ al término no homogéneo. Por fórmula de Duhamel, la solución del sistema estará dada por

$$X(t) = e^{At}C + \int e^{A(t-s)}B(s)ds$$

donde $C \in \mathbb{R}^2$ es un vector de constantes. Para calcular e^{At} diagonalicemos A. Los valores propios estarán dados por las raíces del polinomio característico de la matriz:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

de donde, igualando a 0, se tiene que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$ son los valores propios. Los vectores propios asociados son:

- $\lambda_1 = 1$. Buscamos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(A - I)(u, v) = (0, 0)$:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v = -u$$

  Tomando $u = 1$, se obtiene el vector propio $(1, -1)$.
- $\lambda_2 = 3$. Nuevamente, buscamos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(A - 3I)(u, v) = (0, 0)$:

  $$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v = u$$

  Tomando $u = 1$, se obtiene el vector propio $(1, 1)$.

Con esto, podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =: PDP^{-1}$$

y así la parte homogénea de la solución estará dada por

$$\begin{aligned} X_h(t) = e^{At}C = Pe^{Dt}\underbrace{P^{-1}C}_{C'} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para la solución particular, notamos que

$$e^{A(t-s)} = Pe^{D(t-s)}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ 0 & e^{3(t-s)} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t-s} + e^{3(t-s)} & -e^{t-s} + e^{3(t-s)} \\ -e^{t-s} + e^{3(t-s)} & e^{t-s} + e^{3(t-s)} \end{pmatrix}$$

con lo que

$$\int e^{A(t-s)}B(s)ds = \frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} e^{t-s} + e^{3(t-s)} & -e^{t-s} + e^{3(t-s)} \\ -e^{t-s} + e^{3(t-s)} & e^{t-s} + e^{3(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2s} \\ -e^{-2s} \end{pmatrix} ds$$
$$= \int \begin{pmatrix} e^{t-3s} \\ -e^{t-3s} \end{pmatrix} ds = e^t \int \begin{pmatrix} e^{-3s} \\ -e^{-3s} \end{pmatrix} ds = \frac{e^{-2t}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, la solución general del sistema lineal no homogéneo está dada por

$$X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-2t}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■

P3. (Propuesto) Resuelva el siguiente sistema lineal, especificando su matriz fundamental canónica:

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz fundamental canónica vendrá dada por $\Phi(t) = e^{At}$ (acá $t_0 = 0$), por lo que convendrá diagonalizar la matriz A. Los valores propios están dados por

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Luego, A es diagonalizable pues tiene 3 valores propios distintos (y es cuadrada de 3 por 3). Los vectores propios vienen dados por:

- $\lambda_1 = -1$. Encontramos (u, v, w) tal que $(A + I)(u, v, w) = (0, 0, 0)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ v = w = 0 \end{cases}$$

  Tomando $u = 1$, se obtiene el vector propio $(1, 0, 0)$.

- $\lambda_2 = 2$. Encontramos (u, v, w) tal que $(A - 2I)(u, v, w) = (0, 0, 0)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} v = 3u \\ w = 0 \end{cases}$$

Tomando $u = 1$, se obtiene el vector propio $(1, 3, 0)$.

- $\lambda_3 = 1$. Encontramos (u, v, w) tal que $(A - I)(u, v, w) = (0, 0, 0)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -2u + v + w = 0 \\ v + w = 0 \end{cases}$$

  Juntando las ecuaciones, se encuentra que $u = 0$ y $v = -w$. Tomando $w = 1$, se obtiene el vector propio $(0, -1, 1)$.

Así, A admite la descomposición

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =: PDP^{-1}$$

Para la matriz inversa, ocupamos el algoritmo de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Con esto, la **matriz fundamental canónica** del sistema $X' = AX$ es

$$\Phi(t) = e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} & \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} - e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, una matriz fundamental sería simplemente

$$M(t) = Pe^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 3e^{2t} & -e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

La solución homogénea del sistema vendría entonces dada por

$$X_h(t) = \Phi(t)X(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} & \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} - e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t} - 4e^{-t}}{3} \\ e^{2t} - e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

Nota importante: Si ocupan la matriz fundamental, entonces pueden 1) escribir la solución homogénea como $X_h(t) = M(t)M(0)^{-1}X_0$ (que sería equivalente a lo recién hecho) o 2) escribir la solución en forma general como $X_h(t) = M(t)C$ para $C = (C_1, C_2, C_3)$ un vector de constantes reales y luego encontrar C resolviendo el sistema $M(0)C = X(0)$.

La solución particular vendrá dada por

$$X_p(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2s} \\ -e^{2s} \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & \frac{e^{2(t-s)}-e^{-(t-s)}}{3} & \frac{e^{2(t-s)}-e^{-(t-s)}}{3} \\ 0 & e^{2(t-s)} & e^{2(t-s)} - e^{t-s} \\ 0 & 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2s} \\ -e^{2s} \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t+s} \\ -e^{t+s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} - e^t \\ e^t - e^{2t} \end{pmatrix}$$

Así, la solución del sistema es

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}-4e^{-t}}{3} \\ e^{2t} - e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} - e^t \\ e^t - e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}-4e^{-t}}{3} \\ 2e^{2t} - 2e^t \\ 2e^t - e^{2t} \end{pmatrix}$$

■

P4. Considere el siguiente sistema lineal:

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad t \in I$$

con $A \in C(I)^{m,m}$ y $B \in C(I)^m$

a) Si X e Y satisfacen la ecuación anterior, entonces la diferencia entre las soluciones es solución del sistema homogéneo.

Solución: Sabiendo que X,Y son solución de la ecuación, es decir, la satisface, se obtiene:

X'(t) = A(t)X(t) + B(t)
Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)

Al trabajar con la diferencia de X e Y y utilizando las ecuaciones anteriores:

$$(X(t) - Y(t))' = X'(t) - Y'(t) = A(t)X(t) + B(t) - A(t)Y(t) - B(t)$$
$$= A(t)X(t) - A(t)Y(t) = A(t)(X(t) - Y(t))$$

Tomando una función auxiliar:

H(t) = X(t) - Y(t)
H'(t) = X'(t) - Y'(t)

Entonces, reemplazando lo encontrado anteriormente:

(X(t) - Y(t))'= H'(t)
A(t)(X(t) - Y(t)) = A(t)H(t)

Para finalmente:

$$H'(t) = A(t)H(t)$$

Siendo así (X(t)- Y(t)) Solución del Sistema Homogéneo.

■

b) Si para dos condiciones iniciales X_0 e Y_0 se cumple que si existe un $\delta > 0$ tal que $\|X_0 - Y_0\| < \delta$, entonces existe un ϵ, $T > 0$ se cumple $\|X(t) - Y(t)\| < \epsilon$ para todo $t \in [0, T]$.

Solución: Para esta pregunta debemos recordar variación de parámetros para un sistema lineal:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)ds$$

Por ende, tenemos que las soluciones son:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)ds \\ Y(t) &= e^{A(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)ds \end{aligned}$$

Al trabajar $\|X(t) - Y(t)\|$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|X(t) - Y(t)\| &= \left\| e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)ds - e^{A(t-t_0)}Y_0 - \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)ds \right\| \\ &= \left\| e^{A(t-t_0)}X_0 - e^{A(t-t_0)}Y_0 \right\| = \left\| e^{A(t-t_0)}(X_0 - Y_0) \right\| \\ &\leq \left\| e^{A(t-t_0)} \right\| \cdot \|X_0 - Y_0\| \end{aligned}$$

Debido a que es una exponencial, el término $\left\|e^{A(t-t_0)}\right\| > 0$ y por enunciado, se tiene que $\|X_0 - Y_0\| < \delta$. Por lo cual, bastaría tomar un $\epsilon = e^{A(t-t_0)} \cdot \delta$ tal que $\|X(t) - Y(t)\| < \epsilon$ para $\epsilon > 0$ con $t \in [0, T]$.

■

P5. En una población de N individuos, existen dos variantes de un gen B y b presentes en proporciones $p > 0$ y $q > 0$ respectivamente, con $p+q = 1$. A medida que evoluciona y se mezcla la población, esta no varía en número y puede dividirse en todo instante de la forma $x(t) + y(t) + z(t) = N$, donde x, y, z representa en el número de individuos de los tres tipos de combinaciones posibles BB, Bb y bb respectivamente. La evolución de las poblaciones puede modelarse por el sistema lineal denominado ecuaciones de Hardy-Weinberg dado por:

$$\begin{cases} x' = -qx + \frac{p}{2}y \\ y' = qx - \frac{1}{2}y + pz \\ z' = \frac{q}{2}y - pz \end{cases}$$

a) Escriba el sistema como un sistema lineal homogéneo de matriz A y pruebe que A tiene un valor propio nulo y dos valores propios reales, negativos, distintos, independientes de p y q.

Solución: El sistema puede escribirse como

$$\begin{cases} x' = -qx + \frac{p}{2}y \\ y' = qx - \frac{1}{2}y + pz \\ z' = \frac{q}{2}y - pz \end{cases} \iff X' = \underbrace{\begin{pmatrix} -q & p/2 & 0 \\ q & -1/2 & p \\ 0 & q/2 & -p \end{pmatrix}}_{A} X$$

donde $X = (x, y, z)$. Calculemos los valores propios de A:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -q-\lambda & p/2 & 0 \\ q & -1/2-\lambda & p \\ 0 & q/2 & -p-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-q-\lambda)\begin{vmatrix} -1/2-\lambda & p \\ q/2 & -p-\lambda \end{vmatrix} - \frac{p}{2}\begin{vmatrix} q & p \\ 0 & -p-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-q-\lambda)\left(\frac{p}{2} + \frac{\lambda}{2} + \lambda p + \lambda^2 - \frac{pq}{2}\right) - \frac{p}{2}(-pq - \lambda q) \\ &= -\frac{pq}{2} - \frac{\lambda q}{2} - \lambda pq - \lambda^2 q + \frac{pq^2}{2} - \lambda\frac{p}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^2 p - \lambda^3 + \lambda\frac{pq}{2} + \frac{p^2 q}{2} + \lambda\frac{pq}{2} \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2\left(p + q + \frac{1}{2}\right) - \frac{\lambda}{2}(p+q) - \frac{pq}{2}(1 - q - p) \\ &= -\lambda^3 - \frac{3\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{2} = -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{3\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

donde se usó que $p + q = 1$. Es inmediato que $\lambda_1 = 0$ es valor propio de A, mientras que los otros valores propios están dados por

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3/2 \pm \sqrt{(3/2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1/2)}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

es decir, $\lambda_2 = -1/2$ y $\lambda_3 = -1$, con lo que queda demostrado que la matriz del sistema tiene un valor propio nulo y dos negativos independientes de p y q. ■

b) Usando lo anterior, demuestre que cuando $t \to \infty$ el sistema converge a un estado que es proporcional a un vector propio de A asociado al valor propio nulo (llamado estado de equilibrio).

Solución: Sin calcular analíticamente la solución del sistema, sabemos que esta puede ser escrita como

$$X(t) = C_1 v_1 + C_2 e^{-t/2} v_2 + C_3 e^{-t} v_3$$

donde v_i es vector propio asociado a λ_i y $C_i \in \mathbb{R}$ es constante, para $i = 1, 2, 3$. Luego, es directo que

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = C_1 v_1 + C_2 v_2 \cancelto{0}{\lim_{t\to\infty} e^{-t/2}} + C_3 v_3 \cancelto{0}{\lim_{t\to\infty} e^{-t}} = C_1 v_1$$

es decir, el sistema converge a un estado múltiplo del vector propio asociado al valor propio nulo. ■

c) Calcule dicho vector propio (asociado al valor propio nulo) en términos de p y q y verifique que en el equilibrio se tiene que

$$x : y : z = p^2 : 2pq : q^2$$

Usando esto, si en una población en equilibrio con $N = 900$ se observa la población $z = 100$, estime las poblaciones de equilibrio x e y.

Solución: El vector propio v_0 satisface $(A - \lambda_1 I)v_0 = Av_0 = (0, 0, 0)$, por lo que resolviendo este sistema se obtiene

$$\begin{pmatrix} -q & p/2 & 0 \\ q & -1/2 & p \\ 0 & q/2 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ v_{0,2} \\ v_{0,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -qv_{0,1} + \frac{p}{2}v_{0,2} = 0 \\ qv_{0,1} - \frac{1}{2}v_{0,2} + pv_{0,3} = 0 \\ \frac{q}{2}v_{0,2} - pv_{0,3} = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación es redundante, por lo que trabajamos con la primera y tercera que son más simples. De la primera se tiene que $v_{0,1} = \frac{p}{2q}v_{0,2}$ y de la tercera $v_{0,3} = \frac{q}{2p}v_{0,2}$. Tomando (convenientemente) $v_{0,2} = 2pq$, se obtiene que

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ v_{0,2} \\ v_{0,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{2q}v_{0,2} \\ v_{0,2} \\ \frac{q}{2p}v_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ 2pq \\ q^2 \end{pmatrix}$$

Como v_0 es el estado de equilibrio, esto prueba directamente que la proporción entre las poblaciones x, y y z en tiempo infinito es $x : y : z = p^2 : 2pq : q^2$.

Supongamos ahora que $N = 900$ y que en el equilibrio se observa $z = 100$. Luego, usando la proporción entre las poblaciones en tiempo infinito, se deduce que

$$x + y + 100 = 900 \iff \underbrace{\frac{x}{900}}_{p^2} + \underbrace{\frac{y}{900}}_{2pq} + \underbrace{\frac{100}{900}}_{q^2} = 1 \iff p^2 + 2pq + q^2 = 1$$

de donde $q^2 = 100/900 = 1/9$ y por lo tanto $q = 1/3$ (pues $q > 0$). Luego, $p = 1 - q = 1 - 1/3 = 2/3$. Con esto, se tiene que

$$x = 900p^2 = 900 \cdot \frac{4}{9} = 400$$
$$y = 900 \cdot 2pq = 1800 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 400$$

■