Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
24 de mayo de 2022

Auxiliar 11: Sistemas Lineales

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Ignacia Echeverría H. y Pablo Zúñiga R.

P1. **(Propuesto)** Encuentre la solución general del siguiente sistema lineal de orden 2:

$$X'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X$$

Indicación: diagonalice la matriz del sistema e introduzca un cambio de variable adecuado para obtener tres ecuaciones de segundo orden independientes entre sí.

P2. Encuentre la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{-2t} \\ y' = x + 2y - e^{-2t} \end{cases}$$

P3. **(Propuesto)** Resuelva el siguiente sistema lineal, especificando su matriz fundamental canónica:

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P4. Considere el siguiente sistema lineal:

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad t \in I$$

con $A \in C(I)^{m,m}$ y $B \in C(I)^m$

a) Si X e Y satisfacen la ecuación anterior, entonces la diferencia entre las soluciones es solución del sistema homogéneo.

b) Si para dos condiciones iniciales X_0 e Y_0 se cumple que si existe un $\delta > 0$ tal que $\|X_0 - Y_0\| < \delta$, entonces existe un ϵ, $T > 0$ se cumple $\|X(t) - Y(t)\| < \epsilon$ para todo $t \in [0, T]$.

P5. En una población de N individuos, existen dos variantes de un gen B y b presentes en proporciones $p > 0$ y $q > 0$ respectivamente, con $p+q = 1$. A medida que evoluciona y se mezcla la población, esta no varía en número y puede dividirse en todo instante de la forma $x(t) + y(t) + z(t) = N$, donde x, y, z representa en el número de individuos de los tres tipos de combinaciones posibles BB, Bb y bb respectivamente. La evolución de las poblaciones puede modelarse por el sistema lineal denominado ecuaciones de Hardy-Weinberg dado por:

$$\begin{cases} x' = -qx + \frac{p}{2}y \\ y' = qx - \frac{1}{2}y + pz \\ z' = \frac{q}{2}y - pz \end{cases}$$

a) Escriba el sistema como un sistema lineal homogéneo de matriz A y pruebe que A tiene un valor propio nulo y dos valores propios reales, negativos, distintos, independientes de p y q.

b) Usando lo anterior, demuestre que cuando $t \to \infty$ el sistema converge a un estado que es proporcional a un vector propio de A asociado al valor propio nulo (llamado estado de equilibrio).

c) Calcule dicho vector propio (asociado al valor propio nulo) en términos de p y q y verifique que en el equilibrio se tiene que

$$x : y : z = p^2 : 2pq : q^2$$

Usando esto, si en una población en equilibrio con $N = 900$ se observa la población $z = 100$, estime las poblaciones de equilibrio x e y.

Resumen de contenidos

Definición (Sistema Lineal). Dado $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $t_0 \in I$, matrices $A(t) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $B(t) \in \mathbb{R}^n$ (donde las entradas podrían ser funciones de t) y $X_0 \in \mathbb{R}^n$ (vector fijo), un sistema lineal en $X = X(t) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es el sistema de ecuaciones

$$(SL) \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

La clasificación de Sistemas Lineales se resume en el siguiente recuadro:

Casos	coeficientes constantes	coeficientes variables
Homogéneo	$A \equiv$ cte, $B = 0_n$	$A = A(t)$, $B = 0_n$
No homogéneo	$A \equiv$ cte, $B \neq 0_n$	$A = A(t)$, $B \neq 0_n$

Cuadro 1: Clasificación de Sistemas Lineales

Definición (Exponencial de una matriz). Sea $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Se define la **exponencial de** M como

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{6} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \ldots$$

Teorema (Variación de Parámetros). La solución del sistema

$$(SL) \begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Está dado por

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

donde Φ es la matriz fundamental canónica.