Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
18 de abril de 2022

Auxiliar 6: Variación de Parámetros, Bases Homogeneas y Anuladores para orden n

Profesor: Axel Osses
Auxiliares: Ignacia Echeverría y Pablo Zúñiga

P1. Resuelva las siguientes EDOs de orden n usando polinomio característico.

a) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Solución: El polinomio característico asociado a la ecuación es $p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$, cuyas raíces pueden encontrarse con el Corolario de las Raíces Racionales:

Si $P \in \mathbb{R}[x]$ es mónico, con coeficientes $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}$, entonces toda raíz racional de P es entera y divide a p_0.

Los candidatos están en el conjunto de divisores enteros de -6 $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$ de donde $\lambda = 1, 2, 3$ son las raíces de p. Con esto, la solución de la ecuación diferencial es

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

■

b) **(Propuesto)** $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0$.

Solución: El polinomio característico asociado a la ecuación es $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$, cuyas raíces se encuentran de manera similar al caso anterior, obteniendo que $\lambda = -1$ es raíz de p. Para encontrar el resto de raíces, encontramos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + a\lambda + b) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$$
$$\lambda^3 + (a+1)\lambda^2 + (a+b)\lambda + b = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$$

de donde por igualdad de polinomios se concluye que $a = b = 2$. Así, las raíces faltantes son las que entrega el factor $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$, dadas por

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} - 1 \pm i$$

Con todo lo anterior, la solución de la ecuación diferencial queda

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-x}\operatorname{sen}(x) + Ce^{-x}\cos(x), \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

■

P2. Considere la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(4)} + 2y''' + 11y'' + 2y' + 10y = 0$$

Si la función $\cos(x)$ es una solución de la ecuación, encuentre una base para el espacio de soluciones.

Solución: El polinomio característico de la ecuación es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 11\lambda^2 + 2\lambda + 10$$

Luego, si $\cos(x)$ es solución de la ecuación, entonces $\lambda = i$ es raíz de p, pero esto implica también que $\operatorname{sen}(x)$ es solución de la ecuación. Además, $\lambda = -i$ también es raíz de p con lo que $(\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda^2 + 1$ divide a p. Realizando esta división:

$$\begin{aligned}
&\lambda^4 + 2\lambda^3 + 11\lambda^2 + 2\lambda + 10 : \lambda^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 10 \\
-&(\lambda^4 + \lambda^2) \\
&\quad 2\lambda^3 + 10\lambda^2 + 2\lambda + 10 \\
&\quad -(2\lambda^3 + 2\lambda) \\
&\qquad 10\lambda^2 + 10 \\
&\qquad -(10\lambda^2 + 10) \\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

Con esto, el resto de las raíces provienen del factor $\lambda^2 + 2\lambda + 10$, dadas por

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = -1 \pm 3i$$

De esto se tiene que $e^{-x}\cos(3x)$ y $e^{-x}\operatorname{sen}(3x)$ también son soluciones de la ecuación, y como ya agotamos las raíces del polinomio característico, se concluye que una base para el espacio de soluciones es el conjunto

$$\{\cos(x), \operatorname{sen}(x), e^{-x}\cos(3x), e^{-x}\operatorname{sen}(3x)\}$$

■

P3. Encuentre una base del espacio de soluciones de la siguiente ecuación diferencial

$$D^3(D+3)^2(D-1)^4(D^2+2D+3)^2 y = 0$$

Solución: El polinomio característico de la ecuación diferencial coincide con la organización de los operadores diferenciales, por lo que

$$p(\lambda) = \lambda^3(\lambda+3)^2(\lambda-1)^4(\lambda^2+2\lambda+3)^2$$

Cada factor del polinomio entrega una raíz con cierta multiplicidad, y a su vez entrega un subconjunto de funciones base del espacio de soluciones. Analizando cada factor, se obtiene que:

- λ^3 entrega la raíz $\lambda = 0$ con multiplicidad 3. Luego, al existir resonancia se tiene que el conjunto de soluciones base dada por este factor es

$$\mathcal{H}_0 = \{1, x, x^2\}$$

- $(\lambda + 3)^2$ entrega la raíz $\lambda = -3$ con multiplicidad 2. Luego,

$$\mathcal{H}_{-3} = \{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$$

- $(\lambda - 1)^4$ entrega la raíz $\lambda = 1$ con multiplicidad 4. Luego,

$$\mathcal{H}_1 = \{e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x\}$$

- $(\lambda^2 + 2\lambda + 3)^2$ entrega las raíces complejas conjugadas

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

con multiplicidad 2. Luego,

$$\mathcal{H}_{-1\pm i\sqrt{2}} = \{e^{-x}\cos(\sqrt{2}x), e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x), xe^{-x}\cos(\sqrt{2}x), xe^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\}$$

Juntando todo lo anterior, un conjunto base del espacio de soluciones es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_{-3} \cup \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_{-1\pm i\sqrt{2}} \\ &= \{1, x, x^2, e^{-3x}, xe^{-3x}, e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x, \\ &\quad e^{-x}\cos(\sqrt{2}x), e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x), xe^{-x}\cos(\sqrt{2}x), xe^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\}\end{aligned}$$

Observación: Notar que $|\mathcal{H}| = gr(p) = 13$. ■

P4. Encuentre la forma que tiene la solución general de (separe el análisis en solución homogénea primero y solución particular después):

$$y^{iv} + \beta y''' + y''' = xe^{\alpha x}$$

Para todos los posibles valores reales de los parámetros α y β. **Nota:** no es necesario que encuentra las constantes de las soluciones particulares.

Solución: Esta pregunta se verá en el auxiliar 7 asi que no habrá ningún spoiler jejej. ■

P5. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial, indicando su intervalo de definición.

$$y'' - y' + 7y = x^3 + e^x \operatorname{sen}(3x)$$

Solución:

Solución de la ecuación homogénea: Resolvemos la ecuación $y'' - y' + 7y = 0$. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 7$, cuyas raíces están dadas por

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

con lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = Ae^{x/2}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) + Be^{x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Solución particular: Como la EDO es lineal de coeficientes constantes, la solución particular se puede obtener como la suma de las soluciones particulares obtenidas al resolver la ecuación con el lado izquierdo de la EDO original y lado derecho cada sumando del lado derecho de la EDO original. En este caso, resolvemos las EDO

$$(1) \quad y'' - y' + 7y = x^3 \quad \text{y} \quad (2) \quad y'' - y' + 7y = e^x\operatorname{sen}(3x)$$

por separado.

Para ambas ecuaciones utilizaremos coeficientes indeterminados. Para (1), como el lado derecho es el polinomio $x \mapsto x^3$, proponemos como solución particular la función

$$y_{p,1}(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$$

Tenemos

$$\begin{aligned} y_{p,1}'(x) &= A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 \\ y_{p,1}''(x) &= 2A_2 + 6A_3x \end{aligned}$$

Reemplazando en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} & 2A_2 + 6A_3x - A_1 - 2A_2x - 3A_3x^2 + 7A_0 + 7A_1x + 7A_2x^2 + 7A_3x^3 = x^3 \\ \iff & 7A_0 - A_1 + 2A_2 + (7A_1 - 2A_2 + 6A_3)x + (7A_2 - 3A_3)x^2 + 7A_3x^3 = x^3 \end{aligned}$$

Por igualdad de polinomios se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} 7A_0 - A_1 + 2A_2 & = 0 \\ 7A_1 - 2A_2 + 6A_3 & = 0 \\ 7A_2 - 3A_3 & = 0 \\ 7A_3 & = 1 \end{cases}$$

donde su resolución entrega los valores

$$A_0 = -\frac{78}{2401}, \quad A_1 = -\frac{36}{343}, \quad A_2 = \frac{3}{49}, \quad A_3 = \frac{1}{7}$$

con lo que

$$y_{p,1}(x) = -\frac{78}{2401} - \frac{36x}{343} + \frac{3x^2}{49} + \frac{x^3}{7}$$

Para (2), debemos pensar en qué tipo de valores propios otorgan soluciones del estilo $x \mapsto e^x\operatorname{sen}(3x)$. En este caso, si $1 + 3i$ fuese valor propio del polinomio característico, entonces un factor del polinomio debería ser $((\lambda - 1)^2 + 3)$ y un sumando de la solución entregada por ese factor sería precisamente $x \mapsto e^x \operatorname{sen}(3x)$ por alguna constante multiplicativa. Esto nos lleva a proponer la solución particular

$$y_{p,2}(x) = B_0 e^x \cos(3x) + B_1 e^x \operatorname{sen}(3x)$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
y'_{p,2}(x) &= B_0 e^x \cos(3x) - 3B_0 e^x \operatorname{sen}(3x) + B_1 e^x \operatorname{sen}(3x) + 3B_1 e^x \cos(3x) \\
&= (B_0 + 3B_1) e^x \cos(3x) + (-3B_0 + B_1) e^x \operatorname{sen}(3x) \\
y''_{p,2}(x) &= (B_0 + 3B_1) e^x \cos(3x) - 3(B_0 + 3B_1) e^x \operatorname{sen}(3x) + (-3B_0 + B_1) e^x \operatorname{sen}(3x) \\
&+ 3(-3B_0 + B_1) e^x \cos(3x) \\
&= (-8B_0 + 6B_1) e^x \cos(3x) + (-6B_0 - 8B_1) e^x \operatorname{sen}(3x)
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2) se obtiene

$$\begin{aligned}
& (-8B_0 + 6B_1) e^x \cos(3x) + (-6B_0 - 8B_1) e^x \operatorname{sen}(3x) \\
& - (B_0 + 3B_1) e^x \cos(3x) - (-3B_0 + B_1) e^x \operatorname{sen}(3x) \\
& + 7B_0 e^x \cos(3x) + 7B_1 e^x \operatorname{sen}(3x) = e^x \operatorname{sen}(3x) \\
\iff & (-2B_0 + 3B_1) e^x \cos(3x) + (-3B_0 - 2B_1) e^x \operatorname{sen}(3x) = e^x \operatorname{sen}(3x)
\end{aligned}$$

Como las funciones $e^x \cos(3x)$ y $e^x \operatorname{sen}(3x)$ son linealmente independientes, los coeficientes en la izquierda y derecha de la igualdad deben ser iguales, lo que nos entrega las ecuaciones

$$\begin{cases} -2B_0 + 3B_1 = 0 \\ -3B_0 - 2B_1 = 1 \end{cases}$$

cuya solución nos da los valores

$$B_0 = -\frac{3}{13} \quad B_1 = -\frac{2}{13}$$

con lo que

$$y_{p,2}(x) = -\frac{3}{13} e^x \cos(3x) - \frac{2}{13} e^x \operatorname{sen}(3x)$$

Juntando todo lo anterior, se obtiene que la solución general de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_h(x) + y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) \\
&= A e^{x/2} \cos\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) + B e^{x/2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right) \\
&- \frac{78}{2401} - \frac{36x}{343} + \frac{3x^2}{49} + \frac{x^3}{7} - \frac{3}{13} e^x \cos(3x) - \frac{2}{13} e^x \operatorname{sen}(3x)
\end{aligned}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. ■