

Auxiliar 6: Variación de Parámetros, Bases Homogeneas y Anuladores para orden n

Profesor: Axel Osses

Auxiliares: Ignacia Echeverría y Pablo Zúñiga

P1. Resuelva las siguientes EDOs de orden n usando polinomio característico.

a) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

b) **(Propuesto)** $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0$.

P2. Considere la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(4)} + 2y''' + 11y'' + 2y' + 10y = 0$$

Si la función $\cos(x)$ es una solución de la ecuación, encuentre una base para el espacio de soluciones.

P3. Encuentre una base del espacio de soluciones de la siguiente ecuación diferencial

$$D^3(D+3)^2(D-1)^4(D^2+2D+3)^2y = 0$$

P4. Encuentre la forma que tiene la solución general de (separe el análisis en solución homogénea primero y solución particular después):

$$y^{iv} + \beta y''' + y''' = xe^{\alpha x}$$

Para todos los posibles valores reales de los parámetros α y β . **Nota:** no es necesario que encuentre las constantes de las soluciones particulares.

P5. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial, indicando su intervalo de definición.

$$y'' - y' + 7y = x^3 + e^x \sin(3x)$$

Resumen de contenidos

Definición. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $n \in \mathbb{N}$ y $Q \neq 0$. Considere la EDO

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x), \quad \forall x \in I \quad (1)$$

Se define el **s.e.v. de soluciones homogéneas** de (1) como

$$\mathcal{H} := \{z \in C^n(I) : a_n(x)z^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)z^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)z'(x) + a_0(x)z(x) = 0, \forall x \in I\}$$

Asimismo, se define el **conjunto de soluciones** de (1) como

$$\mathcal{S} := \{z \in C^n(I) : a_n(x)z^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)z^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)z'(x) + a_0(x)z(x) = Q(x), \forall x \in I\}$$

En el caso $a_k(x) = a_k \equiv \text{cte}$ y $Q \equiv 0$, a (1) se le asocia el **polinomio característico** dado por $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.

Definición. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{F} \subseteq C^n(I)$. Se dice que un conjunto $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq C^n(I)$ es una **base** de $\mathcal{F}$ si (i) $\{y_1, \dots, y_n\}$ es linealmente independiente y (ii) $\{y_1, \dots, y_n\}$ genera $\mathcal{F}$, es decir, $\langle \{y_1, \dots, y_n\} \rangle = \mathcal{F}$.

Teorema 1 (Soluciones de una EDO homogénea de orden 2). Considere la EDO lineal homogénea de orden 2 a coeficientes constantes dada por $y'' + ay' + by = 0$. Entonces existe una base $\{y_1, y_2\}$ del espacio de soluciones homogéneas $\mathcal{H}$. Más aún, si λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio característico asociado, entonces:

- i) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ es una base de $\mathcal{H}$.
- ii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, entonces $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ es una base de $\mathcal{H}$.
- iii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ son complejos conjugados, a decir, $\lambda_1 = \sigma + iw$ y $\lambda_2 = \sigma - iw$, entonces $\{e^{\sigma x} \cos(wx), e^{\sigma x} \sin(wx)\}$ es una base de $\mathcal{H}$.

Teorema 2 (Solución Particular: Variación de parámetros).

Sea $y'' + by' + cy = Q(x)$ una EDO no-homogénea. Entonces su solución general viene dada por

$$y(x) = y_h + y_p$$

donde, una vez determinada y_h , se puede encontrar y_p con:

$$y_p = -y_1 \int \frac{Q(x)y_2}{W} dx + y_2 \int \frac{Q(x)y_1}{W} dx$$

A continuación, se presenta una tabla resumen con los anuladores más típicos. Considerando $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ (polinomio de grado n), α y ω son constantes reales.

Lado Derecho	Anulador
$p_n(x)$	D^{n+1}
$e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$\cos(\omega x)$	$D^2 + \omega^2$
$\sin(\omega x)$	$D^2 + \omega^2$
$p_n(x)e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^{n+1}$
$p_n(x)\cos(\omega x)$	$(D^2 + \omega^2)^{n+1}$
$p_n(x)\sin(\omega x)$	$(D^2 + \omega^2)^{n+1}$
$e^{\alpha x}\cos(\omega x)$	$(D - \alpha)^2 + \omega^2$
$e^{\alpha x}\sin(\omega x)$	$(D - \alpha)^2 + \omega^2$
$p_n(x)e^{\alpha x}\cos(\omega x)$	$((D - \alpha)^2 + \omega^2)^{n+1}$
$p_n(x)e^{\alpha x}\sin(\omega x)$	$((D - \alpha)^2 + \omega^2)^{n+1}$

Cuadro 1: Anuladores más típicos