Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
04 de abril de 2022

Auxiliar 4: TEU y EDO lineales de orden 2

Profesor: Axel Osses
Auxiliares: Ignacia Echeverría y Pablo Zúñiga

P1. Encuentre dos soluciones distintas del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

¿Esto contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

Solución: En efecto, notemos que $x_1(t) = 1$ satisface $x_1'(t) = 0$, $t^{\frac{1}{3}}(x_1(t)-1)^{\frac{1}{3}} = t^{\frac{1}{3}}(1-1)^{\frac{1}{3}} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x_1(0) = 1$, por lo que resuelve el problema de Cauchy. Para ver que existen más soluciones, resolvamos la ecuación diferencial. Notando que es una ecuación de variables separables y asumiendo que $x \neq 1$, se tiene que

$$x' = t^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} \iff \frac{x'}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = t^{\frac{1}{3}} \implies \int \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \int t^{\frac{1}{3}}\,dt$$

$$\implies \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C \implies x(t) = 1 + \left(\frac{1}{2}t^{\frac{4}{3}} + K\right)^{\frac{3}{2}}$$

donde $K = 2C/3 \in \mathbb{R}$ es constante. Ahora encontramos K tal que $x(0) = 1$, mediante la ecuación

$$x(0) = 1 + K^{\frac{3}{2}} = 1 \iff K = 0$$

de modo que la solución buscada es

$$x(t) = 1 + \frac{t^2}{2^{\frac{3}{2}}}$$

que es distinta de x_1, la solución constante igual a 1. Esto no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad, pues si bien la función $f(t,x) = t^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}$ es continua en su primera variable en todo $\mathbb{R}$, **no es localmente Lipschitz** en un entorno del par de valores iniciales $(0, x(0)) = (0,1)$ pues no es diferenciable en $x = 1$, como se ve a continuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{t^{\frac{1}{3}}}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

En consecuencia, la unicidad de soluciones de este problema de Cauchy no se puede asegurar para la condición inicial $x(0) = 1$. ■

P2. Resuelva las siguientes EDOs de orden 2 usando polinomio característico.

a) $y'' + 4y' + 2y = 0$.

Solución: El polinomio característico asociado a la ecuación es $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 2$, cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Con esto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = Ae^{(-2+\sqrt{2})x} + Be^{(-2-\sqrt{2})x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

■

b) $4y'' + 4y' + 5y = 0$

Solución: El polinomio característico asociado a la ecuación es $p(\lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 5$, cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{8} = -\frac{1}{2} \pm i$$

Con esto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = Ae^{(-\frac{1}{2})x} \cdot cos(x) + Be^{(-\frac{1}{2})x} \cdot sin(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

■

c) $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$

Solución: El polinomio característico asociado a la ecuación es $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$, cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = -2$$

Con esto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = Ae^{(-2)x} + Bxe^{(-2)x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Luego, utilizando las condiciones iniciales

$$y(0) = 1 = Ae^{(-2)\cdot 0} + B \cdot 0 \cdot e^{(-2)\cdot 0} => A = 1$$

Ahora, para la derivada

$$y'(x) = (Ae^{(-2)x} + Bxe^{(-2)x})' = -2Ae^{(-2)x} + Be^{(-2)x} - 2Bxe^{(-2)x}$$

Utilizando la condición inicial

$$y'(0) = 3 = -2Ae^{(-2)\cdot 0} + B \cdot e^{(-2)\cdot 0} - 2B \cdot 0 \cdot e^{(-2)\cdot 0} => B = 5$$

Quedando así, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = e^{-2x} + 5xe^{-2x}$$

■

P3. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando su intervalo de definición.

a) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln(x)$.

Solución:

Solución de la ecuación homogénea: Resolvemos la ecuación $y'' + 2y' + y = 0$. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, cuya raíz es $\lambda = -1$ con multiplicidad algebraica 2. Con esto, la solución de la ecuación homogénea está dada por

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Solución particular: Utilizaremos variación de parámetros. Las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea son e^{-x} y xe^{-x}, de donde el Wronskiano asociado a estas funciones es

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x}$$

Con esto, calculamos

$$\begin{aligned}
\gamma_1(x) &= -\int \frac{e^{-z}\ln(z)ze^{-z}}{e^{-2z}}dz\Big|_{z=x} = -\int z\ln(z)dz\Big|_{z=x} = -\frac{x^2\ln(x)}{2} + \frac{1}{2}\int zdz\Big|_{z=x} \\
&= -\frac{x^2\ln(x)}{2} + \frac{x^2}{4} \\
\gamma_2(x) &= \int \frac{e^{-z}\ln(z)e^{-z}}{e^{-2z}}dz\Big|_{z=x} = \int \ln(z)dz = x\ln(x) - \int dz\Big|_{z=x} = x\ln(x) - x
\end{aligned}$$

Así, la solución particular de la ecuación es

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= e^{-x}\left(-\frac{x^2\ln(x)}{2} + \frac{x^2}{4}\right) + xe^{-x}(x\ln(x) - x) \\
&= e^{-x}\left(\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{3x^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

Juntando todo lo anterior, la solución general de la ecuación diferencial está dada por

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\
&= Ae^{-x} + Bxe^{-x} + e^{-x}\left(\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{3x^2}{4}\right), \quad A, B \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

■

b) **(Propuesto)** $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec(2x)$.

Solución:

Solución de la ecuación homogénea: Resolvemos la ecuación $y'' + 2y' + 5y = 0$. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$, cuyas raíces son dadas por

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = -1 \pm 2i$$

con lo que la solución de la ecuación homogénea está dada por

$$y_h(x) = Ae^{-x}\cos(2x) + Be^{-x}\operatorname{sen}(2x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Solución particular: Utilizaremos variación de parámetros. De la parte anterior, las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea son $e^{-x}\cos(2x)$ y $e^{-x}\operatorname{sen}(2x)$, con lo que el Wronskiano asociado es

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{-x}\cos(2x) & e^{-x}\operatorname{sen}(2x) \\ -e^{-x}\cos(2x) - 2e^{-x}\operatorname{sen}(2x) & -e^{-x}\operatorname{sen}(2x) + 2e^{-x}\cos(2x) \end{vmatrix} \\ &= -e^{-2x}\operatorname{sen}(2x)\cos(2x) + 2e^{-2x}\cos^2(2x) + e^{-2x}\operatorname{sen}(2x)\cos(2x) + 2e^{-2x}\operatorname{sen}^2(2x) \\ &= 2e^{-2x} \end{aligned}$$

De este modo, calculamos

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= -\int \frac{e^{-z}\sec(2z)e^{-z}\operatorname{sen}(2z)}{2e^{-2z}}dz\Big|_{z=x} = -\frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}(2z)}{\cos(2z)}dz\Big|_{z=x} = \frac{1}{4}\ln|\cos(2x)| \\ \gamma_2(x) &= \int \frac{e^{-z}\sec(2z)e^{-z}\cos(2z)}{2e^{-2z}}dz\Big|_{z=x} = \frac{1}{2}\int dz\Big|_{z=x} = \frac{x}{2} \end{aligned}$$

con lo que la solución particular queda

$$y_p(x) = \frac{e^{-x}\cos(2x)\ln|\cos(2x)|}{4} + \frac{xe^{-x}\operatorname{sen}(2x)}{2}$$

Juntando todo lo anterior, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= Ae^{-x}\cos(2x) + Be^{-x}\operatorname{sen}(2x) + \frac{e^{-x}\cos(2x)\ln|\cos(2x)|}{4} + \frac{xe^{-x}\operatorname{sen}(2x)}{2} \end{aligned}$$

■

P4. Considere la ecuación diferencial lineal de segundo orden para $x > 0$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x)$$

Verifique que $\{x^2, x^2\ln(x)\}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y encuentre la solución particular de la ecuación no homogénea.

Solución: Veamos que $y_1 = x^2$ es solución de la ecuación homogénea. En efecto, se tiene $y_1' = 2x$ e $y_1'' = 2$, con lo que

$$x^2y_1'' - 3xy_1' + 4y_1 = 2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 0$$

De igual manera, veamos que $y_2 = x^2\ln(x)$ es solución de la ecuación homogénea. En efecto, se tiene $y_2' = 2x\ln(x) + x$ e $y_2'' = 2\ln(x) + 3$, con lo que

$$x^2y_2'' - 3xy_2' + 4y_2 = 2x^2\ln(x) + 3x^2 - 6x^2\ln(x) - 3x^2 + 4x^2\ln(x) = 0$$

Más aún, es fácil notar que Cy_1 o Cy_2 son soluciones de la ecuación homogénea con $C \in \mathbb{R}$ constante. Para ver que son linealmente independientes, notemos que el Wronskiano asociado a y_1 e y_2 es estrictamente positivo:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2\ln(x) \\ 2x & 2x\ln(x) + x \end{vmatrix} = 2x^3\ln(x) + x^3 - 2x^3\ln(x) = x^3 > 0$$

Luego, como la EDO es de orden 2, se concluye que $\{x^2, x^2\ln(x)\}$ es base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea.

Para encontrar la solución particular, utilizaremos variación de parámetros. Recordemos que para aplicar este método debe considerarse la ecuación diferencial normalizada, que en este caso es

$$y'' - \frac{3y'}{x} + \frac{4y}{x^2} = \ln(x)$$

Luego, usando integración por partes

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= -\int \frac{\ln(z)z^2\ln(z)}{z^3}dz\Big|_{z=x} = -\int \frac{\ln(z)^2}{z}dz\Big|_{z=x} = -\ln(z)^3|_{z=x} + 2\int \frac{\ln(z)^2}{z}dz\Big|_{z=x} \\ &= -\ln(x)^3 - 2\gamma_1(x) \implies \gamma_1(x) = -\frac{\ln(x)^3}{3}\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\gamma_2(x) &= \int \frac{\ln(z)z^2}{z^3}dz\Big|_{z=x} = \int \frac{\ln(z)}{z}dz\Big|_{z=x} = \ln(z)^2|_{z=x} - \int \frac{\ln(z)}{z}dz\Big|_{z=x} \\ &= \ln(x)^2 - \gamma_2(x) \implies \gamma_2(x) = \frac{\ln(x)^2}{2}\end{aligned}$$

Con esto, la solución particular es

$$y_p(x) = y_1(x)\gamma_1(x) + y_2(x)\gamma_2(x) = -\frac{x^2\ln(x)^3}{3} + \frac{x^2\ln(x)^3}{2} = \frac{x^2\ln(x)^3}{6}$$

Juntando todo lo anterior, la solución general de la ecuación diferencial

$$y(x) = Ax^2 + Bx^2\ln(x) + \frac{x^2\ln(x)^3}{6}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

■