Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
04 de abril de 2022

Auxiliar 4: TEU y EDO lineales de orden 2

Profesor: Axel Osses
Auxiliares: Ignacia Echeverría y Pablo Zúñiga

P1. Encuentre dos soluciones distintas del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

¿Esto contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

P2. Resuelva las siguientes EDOs de orden 2 usando polinomio característico.

a) $y'' + 4y' + 2y = 0$.

b) $4y'' + 4y' + 5y = 0$

c) $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$.

P3. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando su intervalo de definición.

a) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln(x)$.

b) **(Propuesto)** $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec(2x)$.

P4. Considere la ecuación diferencial lineal de segundo orden para $x > 0$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x)$$

Verifique que $\{x^2, x^2\ln(x)\}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y encuentre la solución particular de la ecuación no homogénea.

Resumen de contenidos

Definición. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es **Lipschitz** de constante $L > 0$ si

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Definición. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es **globalmente Lipschitz** con respecto a la segunda variable con constante $L > 0$, si

$$\forall x \in I, \forall y, z \in \mathbb{R} : |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$$

Teorema (de Existencia y Unicidad Global o Picard-Lindelöf). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en su primera variable y globalmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema (de Existencia y Unicidad Local). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en su primera variable en x_0 y que existen $r, \delta, L > 0$ tales que para todo $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $y, z \in [y_0 - r, y_0 + r]$ se tiene la desigualdad $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$. Denotemos

$$M = \max_{\substack{x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ y \in [y_0 - r, y_0 + r]}} |f(x, y)| \qquad \delta_0 = \min\left\{\delta, \frac{r}{M}\right\} \qquad J = I \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$$

Entonces existe una única solución local $y \in C^1(J)$ del problema de Cauchy (PC).

Definición. Wronskiano: El Wronskiano asociado a n funciones $y_1 \dots, y_n \in C^n(I)$ es:

$$W(x) = W(y_1(x), ..., y_n(x)) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{bmatrix}$$

Si $y_1, \dots, y_n$ son funciones en $C^n(I)$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$;
- $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$; y
- $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.

Teorema. La solución de una EDO lineal de orden n a coeficientes constantes y homogénea con valores característicos λ_1, λ_2 está dada por

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, entonces $y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces $y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$
- Si λ_1, λ_2 son complejos conjugados de la forma $\sigma \pm iw$, entonces $y(x) = e^{\sigma x}(Ae^{iwx} + Be^{-iwx})$

Teorema. Solución Particular: Variación de parámetros
Sea $y'' + by' + cy = Q(x)$ una EDO no-homogénea. Entonces su solución general viene dada por $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ donde, una vez determinada y_h, se puede encontrar y_p con:

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{Q(x) y_2(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{Q(x) y_1(x)}{W(x)} dx$$