

Auxiliar 2: Ecuación de Ricatti, Bernoulli y Ejemplos

Profesor: Axel Osses

Auxiliares: Ignacia Echeverría y Pablo Zúñiga

P1. Utilizando la ecuación de Ricatti y herramientas estudiadas anteriormente, resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (Algunas respuestas vienen incluida la solución con Bernoulli para tener un estudio más amplio):

a) $y' + xy = xy^2$.

Solución: Esta ecuación puede ser vista como una de Bernoulli con $n = 2$ y de Ricatti. Presentaremos la resolución mediante ambos esquemas.

Solución según Bernoulli: Haciendo $z = y^{1-2} = y^{-1}$, tenemos $z' = -y^{-2}y'$ con lo que multiplicando la ecuación por $-y^{-2}$ se tiene

$$-y^{-2}y' - xy^{-1} = -x \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad z' - xz = -x$$

que es una ecuación lineal de primer orden no homogénea. El factor integrante es $\mu(x) = \exp\left(-\int x dx\right) = e^{-x^2/2}$, con lo que multiplicando la ecuación por $\mu(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2}z' - xe^{-x^2/2}z &= -xe^{-x^2/2} \iff \frac{d(e^{-x^2/2}z)}{dx} = -xe^{-x^2/2} \\ &\implies e^{-x^2/2}z = -\int xe^{-x^2/2}dx \end{aligned}$$

La integral se resuelve con un cambio de variable adecuado

$$\int xe^{-x^2/2}dx = -\int e^u du = -e^u + C' = -e^{-x^2/2} + C'$$

con $C' \in \mathbb{R}$. Volviendo a la ecuación, se tiene que

$$e^{-x^2/2}z = e^{-x^2/2} + C \iff z = 1 + Ce^{x^2/2}$$

donde $C = -C'$. Recuperando el cambio de variable, se concluye que la solución general de la ecuación original está dada por

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{1 + Ce^{x^2/2}}$$

Solución según Ricatti: Por inspección, $y_1(x) = 0$ es solución particular de la ecuación. Luego, introducimos el cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{z} = z^{-1}$, que es exactamente el mismo hecho en el desarrollo según Bernoulli, por lo que las soluciones serán idénticas.

Para ver un desarrollo distinto, podemos escoger otra solución particular que, por inspección, es $y_2(x) = 1$, pues reemplazando en la ecuación se tiene $(1)' + x \cdot 1 = x \cdot 1^2 \iff x = x$,

igualdad que es siempre verdadera. Luego, introducimos el cambio de variable $y = 1 + \frac{1}{z}$, con lo que $y' = -\frac{z'}{z^2}$ y reemplazando en la ecuación queda

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad & -\frac{z'}{z^2} + x \left(1 + \frac{1}{z}\right) = x \left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 \\ \iff & -\frac{z'}{z^2} + x + \frac{x}{z} = x \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) \\ \iff & -\frac{z'}{z^2} + x + \frac{x}{z} = x + \frac{2x}{z} + \frac{x}{z^2} \\ \iff & z' + xz = -x \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal de primer orden no homogénea. El factor integrante es $\mu(x) = \exp\left(\int s ds|_{s=x}\right) = e^{x^2/2}$ con lo que multiplicando la ecuación por $\mu(x)$ se obtiene

$$e^{x^2/2} z' + x e^{x^2/2} z = -x e^{x^2/2} \iff \frac{d(e^{x^2/2} z)}{dx} = -x e^{x^2/2} \implies e^{x^2/2} z = -\int x e^{x^2/2} dx$$

La integral se resuelve con un cambio de variable adecuado

$$\int x e^{x^2/2} dx = \int e^u du = e^u + C' = e^{x^2/2} + C'$$

con $C' \in \mathbb{R}$. Volviendo a la ecuación, se tiene

$$e^{x^2/2} z = C - e^{x^2/2} \iff z = C e^{-x^2/2} - 1$$

donde $C = -C'$. Recuperando el cambio de variable, se concluye que la solución general de la ecuación original está dada por

$$y(x) = 1 + \frac{1}{z(x)} = 1 + \frac{1}{C e^{-x^2/2} - 1} = \frac{1}{K e^{x^2/2} + 1}$$

donde $K = -1/C$.

Observación: Aquí se puede ver que, por distintos que parezcan, los desarrollos para resolver una ecuación diferencial son equivalentes. ■

b) $y' + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

Solución: Esta ecuación es de Ricatti, por lo que debemos encontrar una solución particular para introducir un cambio de variable adecuado. Veamos que $y_1(x) = x$ es solución particular. En efecto, reemplazando y_1 en la expresión a la izquierda, se obtiene

$$1 + x^3 - (2x^2 + 1)x + x^3 + x - 1 = 1 + x^3 - 2x^3 - x + x^3 + x - 1 = 0$$

Luego, introducimos el cambio de variable $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{z(x)}$, con lo que

$y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$ y reemplazando en la ecuación

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad & 1 - \frac{z'}{z^2} + x \left(x + \frac{1}{z} \right)^2 - (2x^2 + 1) \left(x + \frac{1}{z} \right) + x^3 + x - 1 = 0 \\
 \iff & -\frac{z'}{z^2} + x \left(x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} \right) - (2x^2 + 1)x - \frac{2x^2 + 1}{z} + x^3 + x = 0 \\
 \iff & -\frac{z'}{z^2} + x^3 + \frac{2x^2}{z} + \frac{x}{z^2} - 2x^3 - x - \frac{2x^2}{z} - \frac{1}{z} + x^3 + x = 0 \\
 \iff & -\frac{z'}{z^2} + \frac{x}{z^2} - \frac{1}{z} = 0 \iff z' + z = x
 \end{aligned}$$

es decir, se obtiene una ecuación lineal de primer orden no homogénea. El factor integrante es simplemente $\mu(x) = \exp \left(\int ds|_{s=x} \right) = e^x$ con lo que multiplicando la nueva ecuación por $\mu(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 e^x z' + e^x z = x e^x & \iff \frac{d(e^x z)}{dx} = x e^x \implies e^x z = \int x e^x dx = x e^x - e^x + C \\
 & \iff z = x - 1 + C e^{-x}
 \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Recuperando el cambio de variable, la solución general de la ecuación original está dada por

$$y(x) = x + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{x - 1 + C e^{-x}}$$

■

c) **(Propuesto)** $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$.

Solución: La EDO se puede escribir como

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3 = (y - x)^2 - 3$$

Haciendo el cambio de variable $z = y - x$, se tiene $z' = y' - 1$ con lo que

$$y' = (y - x)^2 - 3 \xrightarrow{\text{c.v.}} z' + 1 = z^2 - 3 \iff z' = z^2 - 4 \iff z' = (z - 2)(z + 2)$$

que es una ecuación de variables separables y de Ricatti a la vez. Por esta vez, ilustramos el procedimiento según Ricatti. Observemos que $z_1 = 2$ es solución de la ecuación. Haciendo un nuevo cambio de variable $z = z_1 + 1/w = 2 + 1/w$, se obtiene $z' = -w'/w^2$ con lo que

$$\begin{aligned}
 z' = (z - 2)(z + 2) & \xrightarrow{\text{c.v.}} -\frac{w'}{w^2} = \left(2 + \frac{1}{w} - 2 \right) \left(2 + \frac{1}{w} + 2 \right) \\
 \iff -\frac{w'}{w^2} & = \frac{1}{w} \left(4 + \frac{1}{w} \right) \\
 \iff -\frac{w'}{w^2} & = \frac{4}{w} + \frac{1}{w^2} \\
 \iff w' + 4w & = -1
 \end{aligned}$$

que es una ecuación de primer orden lineal no homogénea. El factor integrante es $\mu(x) =$

$\exp(\int 4ds|_{s=x}) = e^{4x}$, con lo que multiplicando la ecuación por $\mu(x)$ queda

$$e^{4x}w' + 4e^{4x}w = -e^{4x} \iff (e^{4x}w)' = -e^{4x} \implies e^{4x}w = -\int e^{4x}dx = -\frac{e^{4x}}{4} + C$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es constante. Despejando w se obtiene

$$w(x) = -\frac{1}{4} + Ce^{-4x}$$

Recuperando el cambio de variable $z(x) = 2 + 1/w(x)$ se obtiene

$$z(x) = 2 + \frac{1}{Ce^{-4x} - \frac{1}{4}}$$

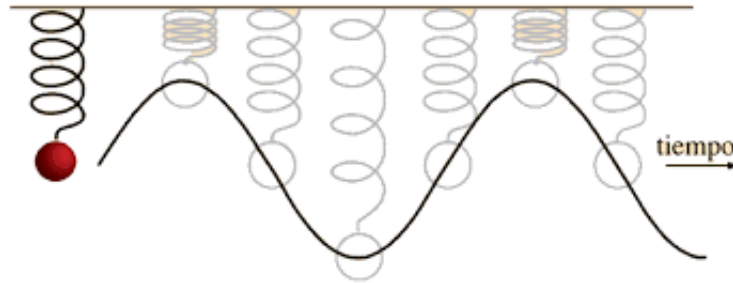
y finalmente recuperando el cambio de variable $z(x) = y(x) - x$ se concluye

$$y(x) = 2 + x + \frac{1}{Ce^{-4x} - \frac{1}{4}} = 2 + x + \frac{4}{Ke^{-4x} - 1}$$

donde $K = 4C \in \mathbb{R}$. ■

- P2.** Considere un resorte en reposo con una constante elástica k . Luego, al agregar una masa m , este se deforma un valor Δ . Posteriormente, se le agrega una Fuerza F , la cual permite a la masa oscilar, como se presenta en la siguiente figura:

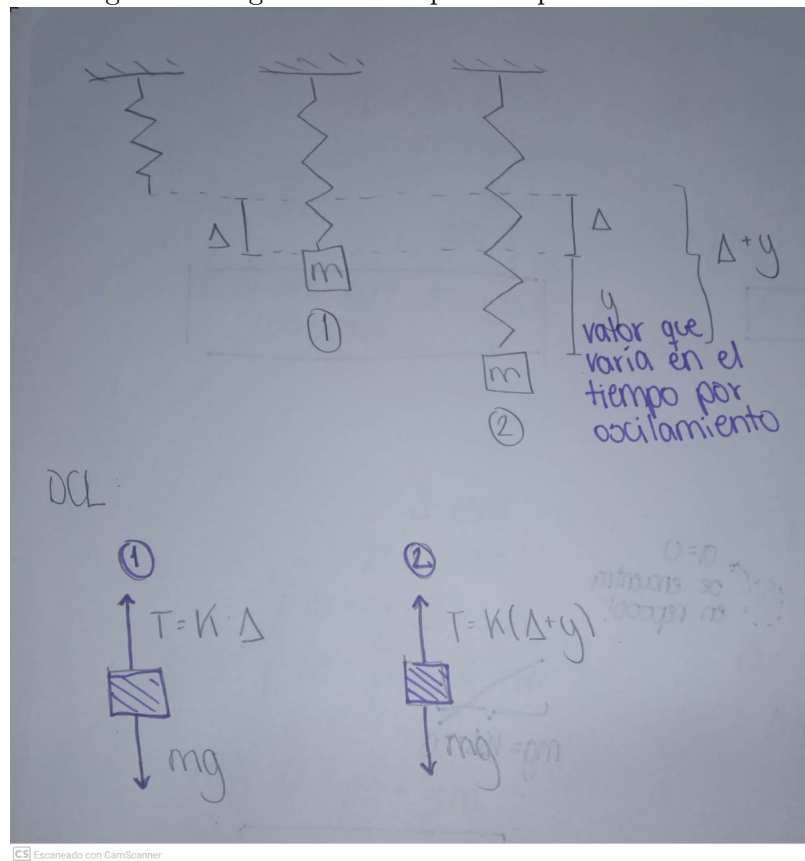
Figura 1: Comportamiento oscilador del resorte con una masa m



Con la información presente resuelva:

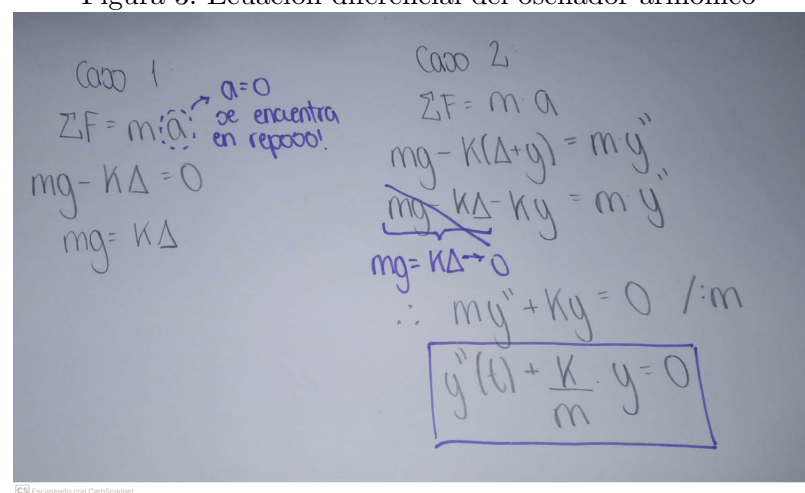
- a) Hacer diagrama de cuerpo libre (DCL) antes de la fuerza F y luego de esta.
Indicación: Recordar Ley de Hooke para resortes: $F = k \cdot \Delta$

Figura 2: Diagrama de cuerpo libre para ambos casos



- b) Utilizar segunda ley de Newton para encontrar la Ecuación diferencial del oscilador armónico.

Figura 3: Ecuación diferencial del oscilador armónico



c) Resolver la EDO encontrada.

Solución: Notemos que $y \equiv 0$ es solución de la EDO. Ahora, si $y \neq 0$, introduzcamos el cambio de variable $p = y'$, de modo que $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p$. Reemplazando en la ecuación, se obtiene

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \xrightarrow{\text{c.v.}} \frac{dp}{dy}p + \frac{k}{m}y = 0 \iff p \frac{dp}{dy} = -\frac{k}{m}y$$

que es una EDO de primer orden en p con variable independiente y , que se puede resolver mediante variables separables. Integrando con respecto a y se obtiene

$$\int p dp = -\frac{k}{m} \int y dy \iff \frac{p^2}{2} = -\frac{k}{m} \frac{y^2}{2} + C \iff p = \pm \sqrt{2C - \frac{k}{m}y^2}$$

donde C es una constante que supondremos satisface $C \geq \frac{k}{m}y^2/2$. Luego, recuperando el cambio de variable $p = y'$, se obtiene la ecuación de variables separables:

$$\begin{aligned} y' = \pm \sqrt{2C - \frac{k}{m}y^2} &\iff \frac{y'}{\sqrt{2C - \frac{k}{m}y^2}} = \pm 1 \\ &\implies \int \frac{dy}{\sqrt{2C - \frac{k}{m}y^2}} = \pm \int dt \\ &\implies \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{k}{m}y^2}} = \pm \sqrt{2C}t + \phi \\ &\implies \frac{\sqrt{2C}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{2C}} y \right) = \pm \sqrt{2C}t + \phi \\ &\iff y(t) = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{2C}} \operatorname{sen}(\pm \sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi) \\ &\iff y(t) = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{2C}} \operatorname{sen}(\pm \sqrt{\frac{k}{m}}t) \cos(\psi) + \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{2C}} \operatorname{sen}(\psi) \cos(\pm \sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ &\iff y(t) = \pm \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{2C}} \cos(\psi) \operatorname{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{2C}} \operatorname{sen}(\psi) \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ &\iff y(t) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + C_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \end{aligned}$$

donde sucesivamente se definieron $\phi \in \mathbb{R}$, $\psi = \sqrt{\frac{k}{m}}\phi/\sqrt{2C} \in \mathbb{R}$, $C_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\psi)/\sqrt{2C} \in \mathbb{R}$, $C_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\operatorname{sen}(\psi)/\sqrt{2C} \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la suposición que hicimos sobre C no tiene porqué ser el caso, en realidad C podría ser tal que $2C < \frac{k}{m}y^2$ y así tener una solución con números complejos involucrados. Por este motivo, concluiremos que las constantes C_1 y C_2 pueden ser complejas, es decir, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. ■

P3. La altura $x(t)$ de un cuerpo en caída libre y sujeto al roce turbulento con el aire está descrito por la ecuación

$$x''(t) = -g + k(x'(t))^2$$

donde $g > 0$ es la aceleración de gravedad terrestre y k es el coeficiente de roce.

- a) Escribir la ecuación en términos de $y = x'$. Encontrar una constante $M > 0$ tal que $y_1 = -M$ es una solución particular.

Solución: Haciendo $y = x'$, derivando la igualdad se obtiene $y' = x''$, con lo que la ecuación queda

$$y'(t) = -g + ky(t)^2$$

Supongamos que existe una constante $M > 0$ tal que $y_1 = -M$ es solución particular de la ecuación. Entonces se satisface que

$$(-M)' = -g + k(-M)^2 \implies M = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Con esto, $y_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}}$ es la solución particular asociada. ■

- b) Encuentre la solución de la EDO original.

Solución: Hagamos $y = -\sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{1}{z}$. Luego, derivando se obtiene $y' = -\frac{z'}{z^2}$ y así

$$\begin{aligned} y'(t) = -g + ky(t)^2 & \xrightarrow{\text{c.v.}} -\frac{z'}{z^2} = -g + k \left(-\sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{1}{z} \right)^2 \\ \iff -\frac{z'}{z^2} & = -g + k \left(\frac{g}{k} - \frac{2}{z} \sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{1}{z^2} \right) \\ \iff -\frac{z'}{z^2} & = -g + g - \frac{2k}{z} \sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{k}{z^2} \\ \iff z' - 2\sqrt{gk}z & = -k \end{aligned} \quad (\star)$$

obteniendo una EDO lineal de primer orden no homogénea. Llamemos $b = 2\sqrt{gk}$. El factor integrante es

$$\mu(t) = \exp \left(\int (-b) dt \right) = e^{-bt}$$

Multiplicando $(\star)$ por $\mu(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 z'e^{-bt} - bze^{-bt} &= -ke^{-bt} \\
 \iff (ze^{-bt})' &= -ke^{-bt} && \text{derivada del producto} \\
 \implies ze^{-bt} &= -k \int e^{-bt} dt && \text{integrando la igualdad} \\
 \implies ze^{-bt} &= \frac{k}{b} e^{-bt} + C && C \in \mathbb{R} \\
 \iff z &= \frac{k}{b} + Ce^{bt} && \text{multiplicando por } e^{bt} \\
 \iff z &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{g}} + Ce^{bt}
 \end{aligned}$$

Observación: otra forma de resolver $(\star)$ es mediante variables separables. Observar que

$$z' - bz = -k \iff z' = bz - k$$

Notemos que $z = \frac{k}{b}$ es solución de la EDO. Ahora, descartando esta solución, podemos dividir por $(bz - k)$ y obtener

$$\begin{aligned}
 \frac{z'}{bz - k} = 1 &\implies \int \frac{dz}{bz - k} = \int dt \implies \frac{1}{b} \ln(|bz - k|) = t + A && A \in \mathbb{R} \\
 \implies |bz - k| &= e^{bt+bA} = e^{bA} e^{bt} = Be^{bt}
 \end{aligned}$$

donde $B = e^{bA} > 0$. Sin embargo, considerando las posibles soluciones del valor absoluto, se obtiene que $B \in \mathbb{R}$ y además

$$bz - k = Be^{bt} \iff bz = k + Be^{bt} \iff z = \frac{k}{b} + \frac{Be^{bt}}{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{g}} + Ce^{bt}$$

donde $C = B/b \in \mathbb{R}$. ■

P4. (Propuesto) Resuelva la siguiente EDO con la ecuación de Bernoulli:

$$y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\sin(x)} = 0$$

Solución: Esta ecuación es de Bernoulli con $n = 2$. Haciendo $z = y^{1-2} = y^{-1}$, se tiene $z' = -y^{-2}y'$ con lo que multiplicando la ecuación por $-y^{-2}$ se obtiene

$$-y^{-2}y' - \cot(x)y^{-1} - \frac{1}{\sin(x)} = 0 \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad z' - \cot(x)z = \frac{1}{\sin(x)}$$

que es una ecuación lineal de primer orden no homogénea. El factor integrante en este caso es

$$\mu(x) = \exp\left(-\int \cot(s)ds \Big|_{s=x}\right) = \exp\left(-\int \frac{\cos(s)}{\sin(s)}ds \Big|_{s=x}\right) = \exp(-\ln|\sin(x)|) = \frac{1}{\sin(x)}$$

(basta considerar cuando $\sin(x) > 0$) con lo que multiplicando la ecuación por $\mu(x)$ se obtiene

$$\frac{z'}{\sin(x)} - \frac{\cot(x)z}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} \iff \frac{d(z/\sin(x))}{dx} = \frac{1}{\sin^2(x)} \implies \frac{z}{\sin(x)} = \int \frac{dx}{\sin^2(x)}$$

La integral de la derecha se resuelve notando que $\frac{d}{dx}(\cot(x)) = -1/\sin^2(x)$, con lo que la ecuación queda

$$\frac{z}{\sin(x)} = -\cot(x) + C \iff z = C \sin(x) - \cos(x)$$

con $C \in \mathbb{R}$. Recuperando el cambio de variable, la solución general de la ecuación original está dada por

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{C \sin(x) - \cos(x)}$$

Ahora encontramos la solución tal que $y(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. De esta condición, necesariamente se debe satisfacer la igualdad

$$\frac{1}{C \sin(\pi/4) - \cos(\pi/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff C = 3$$

con lo que la solución que satisface $y(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ es

$$y(x) = \frac{1}{3 \sin(x) - \cos(x)}$$

■

Resumen de contenidos

EDO	Forma general	Paso clave/Cambio de variable
Integración directa	$y' = f(x)$	$y(x) = \int f(x)dx + C, C \in \mathbb{R}$
Variables separables	$y' = f(x)g(y)$	{Sol. constantes} y $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
Lineal homogénea	$y' + a(x)y = 0$	Var. separables: $f(x) = a(x), g(y) = y$
Lineal no homogénea	$y' + a(x)y = q(x), q \neq 0$	Factor integrante: $\exp(\int a(s)ds _{s=x})$
Homogénea	$y' = h(y/x)$	$z(x) = y(x)/x$
Ricatti	$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$	y_1 sol. $\rightarrow y(x) = y_1(x) + 1/z(x)$
Bernoulli	$y' + a(x)y = q(x)y^n, n \neq 0, 1$	$z(x) = y(x)^{1-n}$
Sin variable dependiente	$F(x, y', y'') = 0$	$z(x) = y'(x)$
Sin variable independiente	$F(y, y', y'') = 0$	$p = y' \implies y'' = \frac{dp}{dy}p$

Cuadro 1: EDO, forma general y sus pasos clave de resolución