

Auxiliar 2: Ecuación de Ricatti, Bernoulli y Ejemplos

Profesor: Axel Osses

Auxiliares: Ignacia Echeverría y Pablo Zúñiga

P1. Utilizando la ecuación de Ricatti y herramientas estudiadas anteriormente, resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

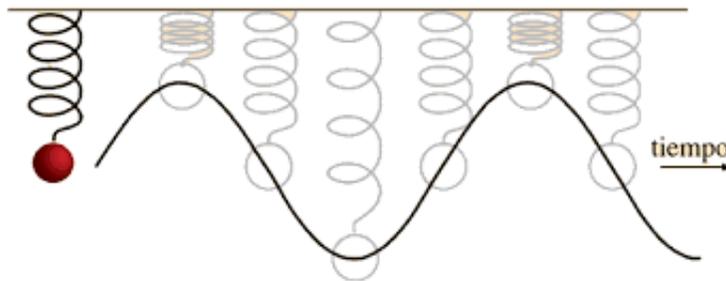
a) $y' + xy = xy^2$.

b) $y' + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$.

c) **(Propuesto)** $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$.

P2. Considere un resorte en reposo con una constante elástica k . Luego, al agregar una masa m , este se deforma un valor Δ . Posteriormente, se le agrega una Fuerza F , la cual permite a la masa oscilar, como se presenta en la siguiente figura:

Figura 1: Comportamiento oscilador del resorte con una masa m



Con la información presente resuelva:

a) Hacer diagrama de cuerpo libre (DCL) antes de la fuerza F y luego de esta.

Indicación: Recordar Ley de Hooke para resortes: $F = k \cdot \Delta$

b) Utilizar segunda ley de Newton para encontrar la Ecuación diferencial del oscilador armónico.

c) Resolver la EDO encontrada.

P3. La altura $x(t)$ de un cuerpo en caída libre y sujeto al roce turbulento con el aire está descrito por la ecuación

$$x''(t) = -g + k(x'(t))^2$$

donde $g > 0$ es la aceleración de gravedad terrestre y k es el coeficiente de roce.

- a) Escribir la ecuación en términos de $y = x'$. Encontrar una constante $M > 0$ tal que $y_1 = -M$ es una solución particular.
- b) Encuentre la solución de la EDO original.

P4. (Propuesto) Resuelva la siguiente EDO con la ecuación de Bernoulli:

$$y' + \cot(x)y + \frac{y^2}{\operatorname{sen}(x)} = 0$$

Resumen de contenidos

EDO	Forma general	Paso clave/Cambio de variable
Integración directa	$y' = f(x)$	$y(x) = \int f(x)dx + C, C \in \mathbb{R}$
Variables separables	$y' = f(x)g(y)$	{Sol. constantes} y $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
Lineal homogénea	$y' + a(x)y = 0$	Var. separables: $f(x) = a(x), g(y) = y$
Lineal no homogénea	$y' + a(x)y = q(x), q \neq 0$	Factor integrante: $\exp(\int a(s)ds _{s=x})$
Homogénea	$y' = h(y/x)$	$z(x) = y(x)/x$
Ricatti	$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$	y_1 sol. $\rightarrow y(x) = y_1(x) + 1/z(x)$
Bernoulli	$y' + a(x)y = q(x)y^n, n \neq 0, 1$	$z(x) = y(x)^{1-n}$
Sin variable dependiente	$F(x, y', y'') = 0$	$z(x) = y'(x)$
Sin variable independiente	$F(y, y', y'') = 0$	$p = y' \implies y'' = \frac{dp}{dy}p$

Cuadro 1: EDO, forma general y sus pasos clave de resolución