Clase 7 (04/04/2022)

Resultados de Aprendizaje	• Conocer las distintas raíces de la EDO de orden n para los diferentes casos del discriminante.

Conocimientos Previos	• Conocer los conceptos de EDO de orden n, polinomio característico, linealmente independiente, espacio vectorial y combinación lineal. • Conocer el discriminante de una función y los distintos casos de este.

De la EDO lineal de orden n, se tiene un conjunto S tal que:

S = { y e C^n : solución de la EDO homogénea}

es un espacio vectorial de dimensión n.

Vimos el caso de coeficientes constantes y EDO homogénea tomando como un caso particular cuando $n = 2$.

$$y'' + a(x)y' + b(x)y \;=\; Q(x)$$

De acá se identifica el concepto de *"Ansatz"*, el cual se define como una **posible** solución de la EDO, por lo cual hay que comprobar si funciona. En este caso probaremos con soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= \; e^{\lambda x} \\ y'(x) &= \; \lambda e^{\lambda x} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Luego, sea:

$$\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)e^{\lambda x} = 0;\; con\; e^{\lambda x} \neq 0$$

Se denomina a los valores que definen el coeficiente por el cual se multiplica la solución como el *polinomio característico,* o por su función matemática $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)$$

Siendo su discriminante $\Delta = \ a^2 - 4b$. Según el valor de este, la solución adoptará diferentes formas.

- **<u>Caso 1:</u>** $\Delta = a^2 - 4b \ > 0$

  λ_1, λ_2 raices reales y distintas

  $$S = < e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} >$$

  Es decir, con esta solución se tienen dos vectores linealmente independientes que describen el plano de soluciones. Llamaremos a $y \ \in \ S$ la solución general. Tendremos entonces que:

  $$y(x) = \ C_1 e^{\lambda_1 x} + \ C_2 \, e^{\lambda_2 x}$$

- **<u>Caso 2:</u>** $\Delta = a^2 - 4b \ = 0$

  λ_1= λ_2, raíces reales e iguales

  $$S = < e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_2 x} >$$

  El siguiente ejemplo será de ayuda para ilustrar cómo encontrar una segunda solución para casos con discriminante igual a 0.

  Sea el polinomio

  $$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - 4)^2 \\ &= \ \lambda^2 - 8\lambda + 16 \\ &\Leftrightarrow \ \ y'' - 8y' + 16y^{(0)} \quad \rightarrow \ \lambda = 4 \end{aligned}$$

  tendremos que $y(x) = e^{4x}$ es solución.

  Ahora falta encontrar y_2, puesto que esta EDO es de orden 2 y un vector no es suficiente para describir su plano de soluciones, por lo que se hará del siguiente modo:

  Usamos D para representar la operación que toma una función y retorna su derivada:

$$(D-4)^2 = D^2 - 8D + 16$$
$$(D-4)^2(y) = y'' - 8y + 16$$
$$(D-4)^2 y = 0$$

Usando esto, las funciones que al derivar dos veces resulta cero son aquellas que representan una recta o una constante. Para este caso conviene usar la recta ya que proporciona más información al ser un caso más general.

$(a+bx)e^{4x} = 0$ *notar que al derivar 2 veces los valores a y b desaparecerán*

$\longrightarrow y_2(x) = xe^{4x}$ *Posible solución*

Comprobemos si sirve:

$$(D-4)^2\left(xe^{4x}\right) = 0$$
$$(D-4)\left(e^{4x} + 4xe^{4x} - 4xe^{4x}\right) = 0$$
$$(D-4)e^{4x} = 0$$
$$4e^{4x} - 4e^{4x} = 0$$
$$0 = 0$$

Dado que es correcto, se concluye que las dos soluciones son de la forma:

$y_1(x) = e^{4x}$ y $y_2 = xe^{4x}$

Si mantenemos los valores de a y b de nuestro Ansatz para y_2, notaremos directamente que:

$$(a+bx)e^{4x}$$
$$\Longrightarrow ae^{4x} + bxe^{4x}$$
$$\Longrightarrow ay_1 + by_2$$

La recta de la primera solución entrega una combinación lineal para las dos soluciones.

Al hacer este mismo ejercicio con valores generales de $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (siempre que $\lambda_1 = \lambda_2$) obtendremos como solución de la EDO:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1} + C_2 x e^{\lambda_2}.$$

– **Caso 3**: $\Delta = a^2 - 4b \ < 0$

$$S = \ < e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x >$$

Para este caso se tienen raíces complejas y conjugadas donde λ queda de la forma:

$$\lambda = \alpha \pm \beta i \quad \beta \neq \ 0; \ \alpha, \ \beta \ \in \ \mathbb{R}$$

Obteniendo las soluciones:

$$y_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{\beta i x}$$
$$y_2(x) = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{-\beta i x}$$

Por cursos anteriores se sabe que $e^{\pm \beta i x}$ puede ser reescrito de la forma:

$$e^{\pm \beta i x} = \ \cos \beta x \pm i \sin \beta x$$

quedando entonces las soluciones y_1 e y_2 expresados como:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x \ )$$
$$y_2(x) = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x \ )$$

Luego recordando que la combinación lineal de las soluciones también es una solución, se tiene que, sumando y restando y_1 e y_2, obtenemos nuevas soluciones y_a e y_b

- y_a= y_1+ y_2 = $e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x \ ) + e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x \ ) \ = \ 2e^{\alpha x} \cos \beta x$

Donde 2 puede reescribirse como consante c_1, por lo que y_a queda expresada de la forma:

$$\Longrightarrow y_a = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

- y_b= y_1- y_2 = $e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x \ ) - e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x \ ) \ = \ 2ie^{\alpha x} \sin \beta x$

Donde $2i$ puede ser considerado como constante c_2. Finalmente y_b queda expresado como:

$$\Longrightarrow y_b = c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Quedando la solución general del modo:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x \ + \ c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

El valor de las constantes c_1 y c_2 no es relevante puesto que a la hora de derivar estas se cancelan.

Aporte Extra Clase 7

Ejercicio resuelto

Resuelva la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' \ + \ 4y' \ + \ 4y \ = \ 0$$

Al ser una ecuación homogénea, buscamos encontrar un espacio de soluciones a la ecuación, por lo tanto trabajaremos con el polinomio característico de la ecuación:

$$y^{(n)} + \overline{a}_{n-1} y^{(n-1)} + ... + \overline{a}_1 y' + \overline{a}_0 y = 0$$
$$\Rightarrow P(D)\, y = 0$$
$$\Leftrightarrow (D - \lambda_1)^{n_1} * (D - \lambda_2)^{n_2} * ... * (D - \lambda_i)^{n_i} = 0$$

Luego, $\{\lambda_i\}$ representa los valores característicos y si $\lambda_i \in \mathbb{R}$, entonces el espacio de las soluciones está representado por:

$$H_{\lambda_i} = \left\{ e^{\lambda_i x},\ x e^{\lambda_i x},\ \dots,\ x^{m_i} e^{\lambda_i x} \right\}$$

Siendo m_i la multiplicidad algebraica de λ_i, y si $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_i = \alpha \pm \beta_i$, entonces:

$$H_{\lambda_i} = \left\{ e^{\alpha x}(cos(\beta x) + sin(\beta x)),\ \dots, x^{m_i - 1} e(cos(\beta x) + sin(\beta x)) \right\}$$

Volviendo a la ecuación inicial:

$$y'' \ + \ 4y' \ + \ 4y \ = \ 0 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$
$$\text{Así } P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda + 2)^2 = 0$$

De esta manera, $\lambda_{1,2} = -2$, con multiplicidad de λ igual a 2. Entonces el espacio de soluciones queda de la siguiente forma:

$$H = \left\{e^{-2x},\ xe^{-2x}\right\}$$

Y por lo tanto como resultado queda:

$$y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$$

Auxiliar 5: "Ecuaciones de Orden Superior", pregunta 1 a), Sección 5 Otoño 2021

Resumen de la clase

Ansatz: Es una aproximación a la solución de la EDO. Se define de la siguiente forma:
Sea S

S = { y e C^n : solución de la EDO homogénea}

El "Ansatz" de la solución se calcula así:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Luego, se define el polinomio característico como:

$$p(\lambda) = \left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)$$

Para luego estudiar el valor de su discriminante y encontrar 3 casos distintos:

Caso 1: $\Delta = a^2 - 4b > 0$. La solución se ve representada por:

$$S = < e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} >$$

con λ_1, λ_2 raíces reales y distintas.
Con estas soluciones se obtienen los vectores que forman el plano de las soluciones. Por lo tanto, se obtiene la solución general de la EDO que es de la forma:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x}$$

Caso 2: $\Delta = a^2 - 4b = 0$. La solución se ve representada por:

$$S = < e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_2 x} >$$

con λ_1= λ_2, raíces reales e iguales.

La cual, al ser resuelta, se llegará a una solución del estilo

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1} + C_2 x e^{\lambda_2}$$

Caso 3: $\Delta = a^2 - 4b < 0$. La solución está dada por raíces complejas y conjugadas de la forma:

$$\lambda = \alpha \pm \beta i \quad \beta \neq 0;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Cuya base de soluciones está dada por:

$$S = < e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x >$$

Y la solución general se define como:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x \ + \ c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$