Clase 6: Viernes 01 de Abril del 2022

Conocimientos Previos:	- Nociones del álgebra lineal: base de un subespacio vectorial, combinación lineal y dimensión de un subespacio vectorial. - Nociones básicas de los polinomios. - Entender que es una solución de una EDO. - Reconocer una EDO lineal de n-ésimo orden homogénea. - Entender que el Conjunto Solución de una EDO Lineal de Orden n homogénea es un subespacio vectorial.
Resultados de Aprendizaje:	- Comprender que cualquier solución de una EDO lineal de orden n se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de la base del subespacio solución. - Identificar los 3 posibles casos al analizar el discriminante de una EDO lineal, siendo Δ >, <, o = 0. - Determinar, a través del polinomio característico, las soluciones que forman la base del conjunto S de una EDO lineal de 2° Orden.

EDO's Lineales de Orden n

Anteriormente se estudió que el conjunto solución S de una EDO lineal de orden n, con $S \subseteq C^n$ y $S \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial. Y como tal, del álgebra lineal se sabe que es posible determinar un conjunto de elementos de C^n tales que sean una base de S (pues posee una dimensión finita). Formalmente, el conjunto S se define como:

Definición: Dado un conjunto $S \subseteq C^n$, llamamos a S el conjunto solución de una EDO lineal de orden n, homogénea, si:

$$S = \left\{ y \in C^n : y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \right\}$$

<u>Obs:</u> Decir que $y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ significa que y resuelve la EDO, ya que se busca una función tal que su n-ésima derivada se pueda expresar como la identidad F, entendiendo esta como una función que permite expresar la forma de la EDO.

Por esto, se tiene que $\forall\, y \in S, \exists\, C_i,\ i = \{1,\ldots,n\}$, tal que: $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$.

<u>Obs:</u> Al elemento $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ *se le llama solución general.*

Donde el conjunto $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ es una base de S. Además, dado el cardinal de la base (número de elementos), se tiene que la dimensión del conjunto solución es n, lo cual coincide con el orden de la ecuación diferencial. Es decir,

$$dim\, S = n = \text{Orden de la EDO}$$

<u>Obs:</u> Notar que ahora las constantes que multiplican a los elementos de la base (los C_i) ahora están indexados por i, es decir, ya no se podrá hablar indistintamente de las constantes, pues cada una de ellas tendrá un valor específico para multiplicar a cada elemento de la base.

Recordando, es sabido que las EDO lineal de orden n homogénea con coeficientes constantes normalizada, es una identidad de la forma:

$$y^{(n)} + \overline{a_{n-1}} y^{(n-1)} + \ ... \ + \overline{a_1} y' + \overline{a_0} y = 0$$

Con $\overline{a_i} \in \Re$, $\forall i \in \{n-1, n-2, ..., 1, 0\}$.

<u>Estructura de la Solución:</u>

Hasta ahora, era sabido que en el caso de las EDO lineal de primer orden, la forma de la solución era:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Para intentar hallar una forma que podría tener la EDO de orden n, consideremos el *Ansatz*:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Reemplazando y en la ecuación diferencial nos queda lo siguiente:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + \overline{a_{n-1}}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + \overline{a_0}e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + \overline{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + ... + \overline{a_0}\right) = 0$$

Donde, al factor $\left(\lambda^n + \overline{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + ... + \overline{a_0}\right) = 0$ se le denomina *Polinomio Característico,* y a sus raíces *valores característicos*.

> $Definición:$ *Al polinomio* $p(\lambda) = \left(\lambda^n + \overline{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + ... + \overline{a_0}\right)$ *se le llama polinomio característico. Las raíces* λ *son llamados valores característicos.*

Es posible establecer una especie de relación entre una EDO y su polinomio característico de la forma en que se ilustra a continuación:

Ejemplo:
Considérese la siguiente EDO,

$$y''' + 3y'' + y = 0$$

Tomando $y(x) = e^{\lambda x}$ con $y'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ se tiene:

$$\lambda^3 e^{\lambda x} + 3\lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 1\right) = 0$$

Por lo que el polinomio característico es: $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 1$.

De aquí en adelante, será de gran interés determinar los λ, es decir, las raíces del polinomio característico para poder caracterizar las soluciones de la EDO.

Obs: *Por* ***Teorema Fundamental del Álgebra*** *se puede asegurar que todo polinomio de grado* n, *de coeficientes reales tiene soluciones complejas, y que además es posible factorizarlo en* $\mathbb{C}$.

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{m_i} \ , \ x_i \in \mathbb{C}$$

(Donde m_i es la multiplicidad)

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

(La sumatoria es el grado del polinomio)

EDO'S Lineales de Orden 2

Antes de adentrarse en el estudio de las EDO lineales de Orden Superior, se comenzará con las de orden 2. Donde se intentará encontrar una base del conjunto solución caracterizando, a través del polinomio característico, la solución $y(x) = e^{\lambda x}$ para así determinar las soluciones que son linealmente independientes y que generan el espacio solución por completo. Notar que para este tipo de ecuaciones diferenciales, es posible obtener que el polinomio característico es de la forma:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

Donde por ser un polinomio de Segundo Grado, se analizan tres casos para el discriminante $\Delta = a^2 - 4b$:

$$(1)\ \Delta > 0$$
$$(2)\ \Delta = 0$$
$$(3)\ \Delta < 0$$

Para el caso (1), existen 2 raíces reales distintas, o sea $\lambda_1 \neq \lambda_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \epsilon \mathbb{R}$, entonces se tiene que:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$
$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO será:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Por lo tanto, las soluciones que forman la base del espacio solución son:

$$S = \left\langle \left\{ e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \right\} \right\rangle$$

Para el caso (2), habrá una raíz, es decir, solo una solución real de multiplicidad dos.
<u>Ejemplo:</u>

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Donde es sabido que $y(x) = e^{\lambda x}$ es solución. Al tomar el polinomio característico se tiene:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Al ver el polinomio característico, se puede establecer una relación entre este y un operador diferencial $(D-1)^2$, con D un operador derivada, se tiene entonces:

$$\begin{aligned} (D-1)^2 y &= 0 \\ (D-1)(D-1)y &= 0 \\ (D-1)(y' - y) &= 0 \\ y'' - y' - y' + y &= 0 \\ y'' - 2y + y &= 0 \end{aligned}$$

<u>Obs:</u> El operador derivada D, se puede entender como una máquina que opera una función y entrega otra función, donde en este caso, al aplicársele a una función entrega la derivada de esta. Por otro lado, el operador diferencial $(D-1)^2 = D^2 - 2D + 1$ es un operador que a la función y la transforma en $y'' - 2y' + y$, esto pues si se considera $\left(D^2 - 2D + 1\right)y$, se tiene que al distribuir el y sobre el operador diferencial, el operador D entrega la derivada y los coeficientes multiplican a y. En simples palabras, el operador diferencial transforma la función y multiplicándola por coeficientes y derivándola.

Ahora, se considera como posible solución:

$$\begin{aligned} y_2 &= xe^x \\ y_2' &= e^x + xe^x \\ y_2'' &= e^x + e^x + xe^x \end{aligned}$$

Notar que si se toma $y_2 = (ax+b)e^x$, a partir de la solución general se tiene:

$$\begin{aligned} C_1 y_1 + C_2 y_2 &= C_1 e^x + C_2(ax+b)e^x \\ &= C_1 e^x + C_2 xe^x \end{aligned}$$

Donde se verifica que tomar el factor $(ax+b)$, es análogo a tomar el factor x.

Por lo tanto, para el caso $\Delta = 0$ se concluye que las soluciones que forman la base son:

$$S = \left\langle \left\{ e^{\lambda x}, xe^{\lambda x} \right\} \right\rangle$$

Ejercicios Resueltos.

1. Para el caso $\Delta > 0$, se solucionará la siguiente EDO, teniendo en cuenta que existen

dos soluciones distintas entre sí.

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 && (Polinomio\ característico)\\
&(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 && (Factorización)\\
&\lambda_1 = 2 \wedge \lambda_2 = 3 && (Raíces\ del\ polinomio)\\
&y_1(x) = e^{2x} \wedge y_2(x) = e^{3x} && (Ansatz)\\
&y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} && (Solución\ general\ de\ la\ EDO)
\end{aligned}
$$

2. Para el caso $\Delta = 0$, mostraremos un ejemplo de la siguiente EDO.

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 && (Polinomio\ característico)\\
&(\lambda - 1)^2 = 0 && (Factorización)\\
&\lambda_{1,2} = 1 && (Raíz\ del\ polinomio)\\
&y_1(x) = e^x && (Ansatz)\\
&y_2(x) = xe^x && (Operador\ diferencial)\\
&y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x && (Solución\ general\ de\ la\ EDO)
\end{aligned}
$$

Fuente: https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/apuntes/tema5n.pdf

Resumen Clase 6

$Definición:$ *Dado un conjunto* $S \subseteq C^n$, *llamamos a* S *el conjunto solución de una EDO lineal de orden* n, *homogénea, si*:

$$S = \left\{ y \in C^n : y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \right\}$$

Entonces se tendrá que $dim\ S = n$ (orden de la EDO).

Solución general de una EDO

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

C_i constantes reales

$i = 1,\ 2, \ldots, n$

Estructura de la Solución:

Según Ansatz, se determina una solución específica para la EDO.

Se tiene que la forma de la solución para EDO lineal de primer orden: $y(x) = e^{\lambda x}$

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Reemplazando y en la ecuación diferencial nos queda lo siguiente:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + \overline{a_{n-1}} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + \overline{a_0} e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + \overline{a_{n-1}} \lambda^{n-1} + \ldots + \overline{a_0}\right) = 0$$

Polinomio Característico: $\left(\lambda^n + \overline{a_{n-1}} \lambda^{n-1} + \ldots + \overline{a_0}\right) = 0$

Obs: por TFA, un polinomio de grado *n* tiene *n* soluciones complejas.

Analizando EDOs lineales de orden 2, las solución general tendrá la siguiente forma:

- Caso $\Delta > 0$, la solución tendrá la siguiente forma:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, soluciones del polinomio característico.

- Caso $\Delta = 0$, la solución tendrá la siguiente forma:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$$

obtenida apartir de la noción de solución lineal (una recta).