MA2002-2 Calculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Alexander Frank.
Auxiliares: Javier Castro y Javier Monreal.

Pauta Auxiliar Extra

29 de Junio de 2022

P1. Para una constante $h > 0$ considere la ecuación

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - hu_x & x \in (-\infty, +\infty),\ t \in (0, +\infty) \\ u(0, x) = f(x) & x \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \tag{1}$$

Usando que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\xi^2 \alpha t}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}.$$

y el método de la transformada de Fourier (suponiendo que las transformadas existen), demuestre que

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - th + 2y\sqrt{t}) e^{-y^2} dy.$$

Solución

Tomando transformada de Fourier en (1) notando que esta operación es lineal, tenemos que para todo $t \in (0, \infty)$

$$\widehat{\partial_t u}(t, \xi) = \widehat{u_{xx}}(t, \xi) - \widehat{hu_x}(t, \xi) = (i\xi)^2 \widehat{u}(t, \xi) - h(i\xi)\widehat{u}(t, \xi).$$

Donde usamos que $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi)$. En estos casos siempre podemos realizar el intercambio $\widehat{\partial_t u}(t, \xi) = \partial_t \widehat{u}(t, \xi)$, con lo cual

$$\partial_t \widehat{u}(t, \xi) = -(\xi^2 + ih\xi)\widehat{u}(t, \xi). \tag{2}$$

La ecuación anterior es válida para todo $t \in (0, \infty)$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Al igual que en separación de variables, la idea de aplicar transformada de Fourier es llegar a una EDO que podamos resolver. En este caso, la ecuación (2) tiene solución

$$\widehat{u}(t, \xi) = Ae^{-(\xi^2 + ih\xi)t}, \quad t \in (0, \infty)$$

con A una constante que determinamos a partir de la condición inicial en (1). Sabemos que por la condición inicial $\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{f}(\xi)$, por otro lado, de la última ecuación se tiene que $\widehat{u}(0, \xi) = A$. Luego,

$$\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-(\xi^2 + ih\xi)t}, \quad t \in (0, \infty)$$

Lo siguiente es tomar antitransformada y acomodar las integrales para llegar a lo pedido

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) e^{-(\xi^2 + ih\xi)t} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y} f(y) dy\right) e^{-(\xi^2 + ih\xi)t} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x - y - ht)} e^{-\xi^2 t} d\xi\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\xi^2 t}\right)(x - y - ht) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x - y - ht)^2}{4t}} dy,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la indicación del enunciado con $\alpha = 1$. Haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} z &= -\frac{(x-y-ht)}{2\sqrt{t}}, \\ dz &= \frac{dy}{2\sqrt{t}} \implies dy = 2\sqrt{t}dz, \\ y &\to -\infty \implies z \to -\infty, \\ y &\to +\infty \implies z \to +\infty, \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - ht + 2z\sqrt{z}) e^{-z^2} dz.$$

P2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$. Determine la serie de potencias de f en torno al origen y su radio de convergencia.

Solución

Usando que para todo $w \in \mathbb{C}$, $e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$

$$f(z) = e^{-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde,

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n/2)!}, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

El radio de convergencia es ∞ porque la serie de $f(z)$ viene de la exponencial cuyo radio es ∞.

P3. Sea $f(z) = \frac{z^3}{z^4+16}$. Muestre que para $|z| < 2$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16^{k+1}} z^{4k+3}.$$

Solución

Usando que para todo $|w| < 1$, $\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k$

$$\frac{z^3}{z^4+16} = \frac{z^3}{16} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{-z^4}{16}\right)\right)} = \frac{z^3}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-z^4}{16}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k+3}}{16^{k+1}}.$$

La representación en serie de la segunda igualdad es válida siempre que $\left|\frac{z^4}{16}\right| < 1 \iff |z| < 2$.

P4. Definamos

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Solución

Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en $z = (x + iy)$ si

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \tag{3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{4}$$

Notemos que,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u(x,y) + iv(x,y)) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 + i0.$$

Igualando parte real e imaginaria se concluye lo pedido.

b) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, muestre que para todo $z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

Solución

Para esta pregunta usamos el siguiente resultado.

Theorem 1. *$f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es Holomorfa en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si y sólo si f satisface Cauchy-Riemann* (3)-(4) *y la función $(x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$ es diferenciable como función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. En tal caso se cumple que,*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Como f es Holomorfa, se cumplen (3)-(4). Calculamos $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ para $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u(x,y) + iv(x,y)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} && \Big/ \text{Cauchy-Riemann} \\
&= f'(z).
\end{aligned}$$

Concluimos notando que usamos las condiciones de Cauchy-Riemann.

c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

Solución

Acá simplemente calculamos, también usaremos que para $f = u + iv$ Holomorfa u, v satisfacen Schwartz.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(y + iv)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u + i\left[\partial^2_{xx} v + \partial^2_{yy} v\right]\right).\end{aligned}$$

Es decir, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ corresponde a

$$\Delta f = 0.$$

d) **(Propuesto)** Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v,$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω.

1) Pruebe que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω.
2) Pruebe que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si y sólo si f y zf son armónicas en Ω.