MA2002-2 Calculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Alexander Frank.
Auxiliares: Javier Castro y Javier Monreal.

Auxiliar Extra

29 de Junio de 2022

P1. Para una constante $h > 0$ considere la ecuación

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - hu_x & x \in (-\infty, +\infty),\ t \in (0, +\infty) \\ u(0,x) = f(x) & x \in (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

Usando que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\xi^2 \alpha t}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}.$$

y el método de la transformada de Fourier (suponiendo que las transformadas existen), demuestre que

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - th + 2y\sqrt{t}) e^{-y^2} dy.$$

P2. Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$. Determine la serie de potencias de f en torno al origen y su radio de convergencia.

P3. Sea $f(z) = \frac{z^3}{z^4+16}$. Muestre que para $|z| < 2$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16^{k+1}} z^{4k+3}.$$

P4. Definamos

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

b) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, muestre que para todo $z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v,$$

y si $\nabla f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω.

1) Pruebe que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω.
2) Pruebe que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si y sólo si f y zf son armónicas en Ω.