P1 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 , & (x,y) \in D \\ u(a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta) = h(\theta) , & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\Delta u(x,y) = \partial^2_{xx} u(x,y) + \partial^2_{yy} u(x,y)$$

Algunas observaciones preliminares:

1.- Primero haremos un c.v. obteniendo $u(r,\theta)$ para $r \in [0, +\infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

2.- La función u se extendirá de forma periódica a todo $\mathbb{R}$ imponiendo

$$u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi).$$

3.- Lo anterior junto a condiciones físicas, nos permitirá obtener una cantidad numerable de soluciones

$$u_n , \quad n \in \mathbb{N}.$$

4.- El Ppio de superposición nos dirá entonces que la sol. general es

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(r,\theta) .$$

La Transformada de Fourier y la cond. inicial nos dan las ctes. $(C_n)_n$

Paso 1. Pasamos de (x,y) a (r,θ). Expresamos la función en términos de (r,θ):

$$u \to u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)$$

La idea es calcular ∂^2_{rr} y $\partial^2_{\theta\theta}$ para luego acomodar hasta llegar a Δu.

- $\partial_r u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) = \partial_x u \cos\theta + \partial_y u \,\text{sen}\theta$

$$\Rightarrow \partial_r \Big(\partial_x u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\cos\theta + \partial_y u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\,\text{sen}\theta \Big)$$

$$= \partial^2_{xx} u \cos^2\theta + \partial^2_{yx} u \,\text{sen}\theta\cos\theta + \partial^2_{xy} u \cos\theta\,\text{sen}\theta + \partial^2_{yy} u\,\text{sen}^2\theta$$

$$= \partial^2_{xx} u \cos^2\theta + \partial^2_{yy} u\,\text{sen}^2\theta + 2\partial^2_{xy} u\,\text{sen}\theta\cos\theta. \quad (1)$$

- $\partial_\theta u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) = -\partial_x u\, r\,\text{sen}\theta + \partial_y u\, r\cos\theta$

$$\Rightarrow \partial_\theta \Big(-\partial_x u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\, r\,\text{sen}\theta + \partial_y u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\, r\cos\theta \Big)$$

$$= \left(\partial^2_{xx} u \, r \operatorname{sen}\theta - \partial^2_{yx} u \, r\cos\theta \right) r \operatorname{sen}\theta$$

$$- \partial_x u \, r\cos\theta$$

$$+ \left(-\partial^2_{xy} u \, r\operatorname{sen}\theta + \partial^2_{yy} u \, r\cos\theta \right) r\cos\theta$$

$$- \partial_y u \, r \operatorname{sen}\theta$$

$$= \partial^2_{xx} u \, r^2 \operatorname{sen}^2\theta + \partial^2_{yy} u \, r^2 \cos^2\theta$$

$$- 2 \partial^2_{xy} u \, r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$- \partial_x u \, r\cos\theta - \partial_y u \, r\operatorname{sen}\theta. \quad (2)$$

Hacemos $(1) + \frac{(2)}{r^2}$

$$\partial^2_{rr} u + \frac{1}{r^2} \partial^2_{\theta\theta} u$$

$$= \partial^2_{xx} u \cos^2\theta + \partial^2_{yy} u \operatorname{sen}^2\theta + 2\partial^2_{xy} u \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$+ \partial^2_{xx} u \operatorname{sen}^2\theta + \partial^2_{yy} u \cos^2\theta$$

$$- 2 \partial^2_{xy} u \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$- \frac{1}{r}\partial_x u \cos\theta - \frac{1}{r}\partial_y u \operatorname{sen}\theta.$$

$$= \Delta u - \frac{1}{r} \underbrace{\left(\partial_x u \cos\theta + \partial_y u \operatorname{sen}\theta \right)}$$

$$= \Delta u - \frac{1}{r}\partial_r u$$

Es decir, la edp nos queda

$$\boxed{\Delta u = \partial^2_{rr} u + \frac{1}{r^2} \partial^2_{\theta\theta} u + \frac{1}{r} \partial_r u = 0}$$

Paso 2.- Resolvemos mediante variables separadas

$$u(r,\theta) = R(r)\, T(\theta).$$

Reemplazando:

$$R''(r)\, T(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)\, T''(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)\, T(\theta) = 0 \Big/ \frac{r^2}{RT}$$

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}$$

$$= \lambda \text{ , cte.}$$

Pq ambos lados dependen de var. $\neq$'s

Obtenemos un par de EDOs:

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) = \lambda R(r) & (A) \\ T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0 & (B) \end{cases}$$

Paso 3.- Resolvemos EDO (A)

$$r^2 R''(r) + r R'(r) = \lambda R(r),$$

mediante el cv

$$r = e^u \quad , \quad Z(u) = R(e^u)$$

$R(r) = Z(\ln(r))$

Se ve tomando $u = \ln(r)$

* Calculamos sus derivadas y vemos que ecuación cumple $Z(u)$:

$$\Rightarrow Z'(u) = R'(e^u)\, e^u$$
$$Z''(u) = R''(e^u)\, e^{2u} + R'(e^u)\, e^u$$

Sumando vemos que:

$$Z'(u) + Z''(u) = R'(e^u) e^u + R''(e^u) e^{2u} + R'(e^u) e^u$$
$$= \lambda R(e^u) + Z'(u)$$
$$= \lambda Z(u) + Z'(u)$$

* Aplicamos polinomio característico:

$$Z''(u) - \lambda Z(u) = 0$$

$p(\alpha) = (\alpha^2 - \lambda)$, luego las raíces del polinomio son

$$\alpha_1 = \sqrt{\lambda} \quad , \quad \alpha_2 = -\sqrt{\lambda}.$$

* Las soluciones de la EDO lineal van a depender de la naturaleza de estas raíces:

A y B son ctes a determinar.

$\lambda > 0$:

$$Z(u) = A e^{\sqrt{\lambda} u} + B e^{-\sqrt{\lambda} u}$$

$\lambda < 0$: $\lambda = -|\lambda|$, $\alpha_1 = i\sqrt{|\lambda|}$, $\alpha_2 = -i\sqrt{|\lambda|}$

$$Z(u) = A \cos(\sqrt{|\lambda|}\, u) + B \operatorname{Sen}(\sqrt{|\lambda|}\, u)$$

Es decir para $\lambda > 0$

$$\boxed{R(r) = A e^{\sqrt{\lambda} \ln(r)} + B e^{-\sqrt{\lambda} \ln(r)}}$$

y para $\lambda < 0$

$$\boxed{R(r) = A \cos(\sqrt{|\lambda|} \ln(r)) + B \operatorname{Sen}(\sqrt{|\lambda|} \ln(r)) \quad \lambda < 0}$$

Por otro lado, si $\lambda = 0$, la EDO nos queda

$$r^2 R''(r) = -r R'(r).$$

Ecuación que se puede resolver mediante el c.v. $S(r) = R'(r)$, obteniendo que para $\lambda = 0$

$$\boxed{R(r) = A \ln(r) + B.}$$

Paso 4.- Resolvemos EDO (B):

En este caso el polinomio característico nos queda

$$p(\alpha) = (\alpha^2 + \lambda).$$

Las raíces de p son $\alpha = \pm\sqrt{-\lambda}$. Luego, las soluciones dependiendo de λ son:

Para $\lambda = 0$

$$T(\theta) = A\theta + B$$

Para $\lambda < 0$

$$T(\theta) = A e^{\sqrt{-\lambda}\,\theta} + B e^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta}$$

Para $\lambda > 0$

$$T(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\,\mathrm{Sen}(\sqrt{\lambda}\,\theta)$$

Paso 5.- Escribimos la solución como $u(r,\theta) = R(r)\,T(\theta)$ para los tres casos de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda > 0$

$$u(r,\theta) = \left(A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\theta)\right) r^{\sqrt{\lambda}} + \left(\tilde{A}\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + \tilde{B}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\theta)\right) r^{-\sqrt{\lambda}}$$

Para $\lambda < 0$

$$\boxed{u(r,\theta) = \left(A\cos\left(\sqrt{|\lambda|}\,\ln(r)\right) + B\,\mathrm{Sen}\left(\sqrt{|\lambda|}\,\ln(r)\right)\right) \times \left(\tilde{A}\, e^{\sqrt{-\lambda}\,\theta} + \hat{B}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta}\right)}$$

Para $\lambda = 0$

$$\boxed{u(r,\theta) = A\,\theta\,\ln(r) + B\ln(r) + C}$$

Paso 6.- Imponemos condiciones físicas y de periodicidad a nuestras soluciones.

El único caso de λ en el cual la sol no crece de forma indefinida cuando $r \searrow 0$ ó $\theta \to \infty$ es cuando $\lambda > 0$ y $\tilde{A} = \tilde{B} = 0$.

$\Rightarrow$ la soluciones quedarán parametrizadas por $\lambda > 0$:

$$u_\lambda(r,\theta) = \left(A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B_\lambda\,\mathrm{Sen}(\sqrt{\lambda}\,\theta)\right) r^{\sqrt{\lambda}}$$

La periodicidad nos dirá que

$$\begin{cases} \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) = \cos\left(\sqrt{\lambda}(\theta+2\pi)\right) \\ \mathrm{Sen}\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) = \mathrm{Sen}\left(\sqrt{\lambda}(\theta+2\pi)\right). \end{cases}$$

Esto pasa si y sólo si $\sqrt{\lambda} = n \in \mathbb{N}$.

Luego, por ppio de superposición, la sol. será:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta) \right) r^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) r^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\theta) r^n$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) r^n$$

Para buscar las ctes $(A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ igualamos

radio del disco

$$u(a, \theta) = h(\theta),$$

tomando la descomposición en serie de Fourier de h.

Finalmente:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) r^n$$

con $\quad A_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta$

$$A_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta, \quad B_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta.$$

Por tiempo, P_2 y P_3 quedan propuestos :)