

Pl $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

- Calculamos masa total M como

$$M = \int_{\Gamma} \rho d\vec{r} = \int_a^b \underbrace{\rho(\vec{r}(t))}_A \left\| \underbrace{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}_B \right\| dt$$

* Notar que $a=0$ y $b=2\pi$

$$A = \cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2 = 1 + t^2$$

$$B = \|(-\sin(t), \cos(t), 1)\|$$

$$= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$$

Luego, 2π

$$M = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} (1+t^2) dt = \sqrt{2} \left(2\pi + \int_0^{2\pi} t^2 dt \right)$$

Finalmente:

$$M = \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right)$$

- Calculamos centro de masa con

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \int_V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho \, dV \in \mathbb{R}^3, \text{ centro de masa es un vector.}$$

Aca sólo muestro el x_G , el resto sigue la misma lógica.

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \cos(t) (1+t^2) \sqrt{2} \, dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{M} \left(\int_0^{2\pi} \cos(t) \, dt + \underbrace{\int_0^{2\pi} t^2 \cos(t) \, dt}_{\text{por partes dos veces}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{M} (0 + 4\pi) \end{aligned}$$

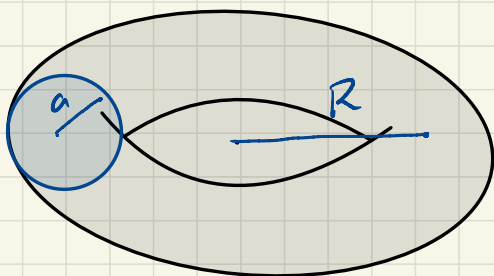
Al calcular todas las coordenadas obtenemos

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{6}{3+4\pi^2}, & y_G &= \frac{-6\pi}{3+4\pi^2} \\ z_G &= \frac{3\pi(1+2\pi^2)}{3+4\pi^2} \end{aligned}$$

P2

Calculamos el área de un toro (R, a) :

a)



En el apunte pueden ver que la parametrización del toro viene dada por:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = ((R + a \sin \varphi) \cos \theta, (R + a \sin \varphi) \sin \theta, a \cos \varphi)$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad ,$$

llamemos A el área a calcular.

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\partial_\theta \vec{r} \times \partial_\varphi \vec{r}\| \, d\varphi \, d\theta$$

$$\|h_\theta \hat{\theta} \times h_\varphi \hat{\varphi}\| = h_\theta h_\varphi = \|\partial_\theta \vec{r}\| \cdot \|\partial_\varphi \vec{r}\|$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + a \sin \varphi) a \, d\varphi \, d\theta$$

$$\Rightarrow A = 4\pi^2 a R$$

b) Calculamos área del Helicoide

$$\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \frac{h\theta}{2\pi})$$
$$\rho \in [0, a], \theta \in (0, 2\pi)$$

llamemos A el área a calcular.

$$A = \int_0^a \int_0^{2\pi} \|\partial_\rho \vec{r} \times \partial_\theta \vec{r}\| d\theta d\rho$$

- $\partial_\rho \vec{r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$
- $\partial_\theta \vec{r} = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, \frac{h}{2\pi})$
- $\partial_\rho \vec{r} \times \partial_\theta \vec{r} = (\frac{h}{2\pi} \sin \theta, -\frac{h}{2\pi} \cos \theta, \rho)$

Reemplazando llegamos a un integral tipo:

$$A = \frac{h^2}{2\pi} \int_0^{\frac{a2\pi}{h}} \sqrt{1+u^2} du$$

El cálculo de la integral queda propuesto,
se debe hacer un c.v de la forma

$$u = \sinh(x).$$

P3

$$S = \left\{ \left(\cos z \cos \theta, \cos z \sin \theta, z \right) \mid \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, \pi/2] \end{array} \right\}$$

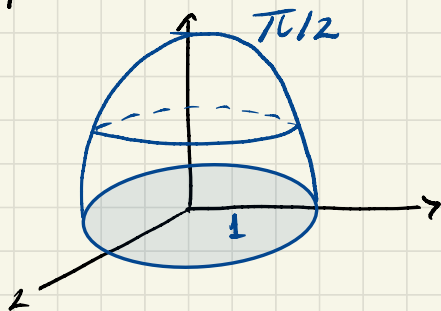
a) Parametrice S .

$$\star = \cos z \left(\cos \theta, \sin \theta, 0 \right) + z \hat{k}$$

Luego la parametrización nos queda:

$$r(\theta, z) = \cos z \hat{\rho} + z \hat{k}$$

Para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z \in [0, \pi/2]$



b.1) Buscamos calcular flujo usando Gauss cerrando S con una tapa. Llamemos T a esta tapa.

$$\Rightarrow \int_{S \cup T} \mathbf{F}_i \cdot d\hat{\mathbf{A}} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}_i) dv$$

Calculamos divergencia en esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\underbrace{r(e^{\varphi} + \cos \varphi)}_{\text{no depende de } \theta} \right] \right) = 0$$

La integral de volumen se anula y por lo tanto:

$$\int_S \mathbf{F}_1 \cdot d\vec{A} = - \int_T \mathbf{F}_1 \cdot d\vec{A}$$

Parametrizamos la tapa según

$$(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0) \quad \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^{\varphi} + \cos \varphi) \hat{\theta} \cdot \underbrace{(-\rho \hat{x})}_{\text{normal exterior}} dr d\varphi = 0$$

$\hat{\theta} \cdot \hat{x} = 0$

$\Rightarrow$

$$\int_S \mathbf{F}_1 \cdot d\vec{A} = 0$$

b.2)

En este caso tapamos con una semi-esfera $\tilde{S}$ parametrizado por

$$(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$$

$$\text{con } r=1, \quad \varphi \in [\pi/2, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Usando ley de Maxwell

$$\int_{S \cup \tilde{S}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{F}_2 \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} - \underbrace{\int_{\tilde{S}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{A}}_{\star}$$

$$\star = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} \sin\varphi d\varphi d\varphi = \frac{Q}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{F}_2 \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{2\epsilon_0}$$

P4

propuesto.