MA2002-2 Calculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Alexander Frank.
Auxiliares: Javier Castro y Javier Monreal.

Auxiliar 10

23 de Mayo de 2022

P1. Calcule la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)e^{-4x}, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3. \end{cases}$$

P2. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funciones integrables tal que sus transformadas también lo son.

a) Demuestre, usando transformada de Fourier, la identidad de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\bar{g}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\bar{\widehat{g}}(s)ds$$

b) Deduzca la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds.$$

P3. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & \sim . \end{cases}$$

Calcule la transformada de f y deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(s)}{s^2} ds = \pi.$$

- Dada una función $f\colon [-l, l] \to \mathbb{R}$, se define

$$S_f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)d\xi\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)d\xi\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}$$

- Sea f una función integrable, se definen $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys}dy \quad \text{y} \quad \check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{ixs}ds.$$

- **Teorema de inversión**. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable y supongamos además que $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ es integrable. Entonces se tiene que si f es continua, $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)$.