MA2002-2 Calculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Alexander Frank.
Auxiliares: Javier Castro y Javier Monreal.

Auxiliar 6

18 de Abril de 2022

P1. La densidad de masa de un alambre helicoidal parametrizado por $\vec{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t),\ t \in [0, 2\pi]$ viene dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcule la masa total y el centro de masa del alambre.

P2. *a*) Calcule el área de un toro definido por (R, a) usando la parametrización,

$$\vec{r}(\theta, \phi) = \big((R + s\sin(\phi))\cos(\theta), (R + a\sin(\phi))\sin(\theta), a\cos(\phi)\big).$$

b) Calcule el área del Helicoide dado por la Figura 1 de altura h y radio a.

P3. Considere la superficie dada por

$$S = \{(\cos(z)\cos(\theta), \cos(z)\sin(\theta), z) \mid \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, \pi/2]\}$$

a) De una parametrización de S.

b) Escoga una orientación para S y calcule flujo para:

1) $F(r, \varphi, \theta) = (e^{r^3} + \cos(\varphi))\hat{\theta}$.
2) $F(r, \varphi, \theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$.

P4. *a*) Hallar el área limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin(\theta))$, $y = a(1 - \cos(\theta))$, $a > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y el eje x.

b) Evaluar la integral de línea

$$\int_\Gamma 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz,$$

donde γ es una curva simple orientada desde el punto $(1, 1, 1)$ al punto $(1, 2, 4)$. Justifique su respuesta.

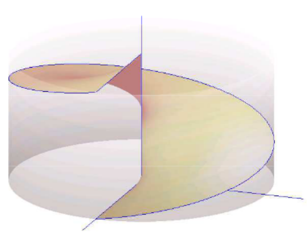

Figura 1

- Para un sistema de coordenadas curvilineas $\vec{r} = (u, v, w)$ se tiene que $h_u = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|$, $h_v = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$ y $h_w = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\|$.
- $\hat{u} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y de forma análoga se define $\hat{v}$ y $\hat{w}$.
- $\nabla \cdot F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial_u}[F_u h_v h_w] + \frac{\partial}{\partial_v}[h_u F_v h_w] + \frac{\partial}{\partial_w}[h_u h_v F_w]\right)$
- $\nabla \times F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial_u} & \frac{\partial}{\partial_v} & \frac{\partial}{\partial_w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$
- Cilíndricas: $\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$, $h_\rho = h_z = 1$ y $h_\theta = \rho$.
- Esféricas: $\vec{r}(r, \varphi, \theta) = (r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$, $h_r = 1$, $h_\varphi = r$ y $h_\theta = r\operatorname{sen}\varphi$.
- (**Integral de flujo**) Sea S una superficie regular orientable,

  $$\int_S F \cdot d\vec{A} = \int_D F(\vec{r}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\right] dudv,$$

  donde $\vec{r}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación.
- $dV = |(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}) \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial w})| dudvdw$.
- (**Área**) Sea S una superficie simple y regulat y $\vec{r}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de esta. Se define el área de S como

  $$A(S) = \iint_D \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\right\| dudv.$$

- (**Integral de trabajo o línea**) Sea Γ una curva simple y regular,

  $$\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt,$$

  donde $\vec{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de Γ.
- (**Teorema de Gauss**) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, acotado y cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos orientada según la normal exterior. Sea F campo $\mathcal{C}^1$. Entonces,

  $$\int_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{A} = \int_\Omega (\nabla \cdot F) dV.$$

- (**Teorema de Stokes**) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea también F un campo $\mathcal{C}^1$. Entonces,

  $$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{A}.$$